Kants Philosophie der Arithmetik.

INAUGURAL-DISSERTATION
zur
Erlangung der Doktorwürde
genehmigt
von der philosophischen Fakultät
der Rheinischen Friedrich Wilhelms-Universität
zu Bonn

vorgelegt von

HEINRICH HOLZAPFEL
aus Düsseldorf.

1937

DISSERTATIONS-VERLAG G. H. NOLTE DÜSSELDORF

INHALTS-ÜBERSICHT.

I. Philosophie der Mathematik und mathematische Philosophie in Gegenwart und Vergangenheit. — Die Stellung der Mathematik in der Philosophie Kants 1

II. Der Problemkreis der Philosophie der Arithmetik . . 8

III. Darstellung der Philosophie der Arithmetik Kants . . 13

1) Der Gegenstand der Mathematik 16

2) Die natürlichen Zahlen (Zahl-Zeit-Problem) . . . 24

3) Die nicht-natürlichen Zahlen 38

4) Die Methode der Mathematik 42

IV. Kritik der Philosophie der Arithmetik Kants . . . 43

V. Kant und die heutige Problemlage in der Philosophie der Arithmetik 50

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552321_0132

I.

Philosophische Fragen der Mathematik und insbesondere auch der Arithmetik sind nie so lebhaft diskutiert worden wie in der Gegenwart und in der jüngsten Vergangenheit. Die Gründe für diese wissenschaftsgeschichtliche Tatsache liegen auf der Hand. Sowohl auf philosophischem wie auf mathematischem Gebiete haben sich in den letzten Jahrzehnten, etwa um die Mitte (z. T. auch bereits in der ersten Hälfte) des vergangenen Jahrhunderts beginnend, Entwicklungen vollzogen, die der Philosophie der Mathematik notwendig einen bedeutenden Auftrieb verleihen mußten. Wir denken einerseits an die Entstehung einer systematischen „Wissenschaftstheorie", deren Aufgabe die Untersuchung der logischen Struktur der Wissenschaften, genauer: die allgemeine ontologische und logische Charakterisierung der Gegenstände und Methoden der Wissenschaften ist[1]), andererseits an die erstaunlichen Fortschritte der Mathematik, für deren Ausmaß sich wohl in der Geschichte dieser Wissenschaft keine Parallele aufweisen läßt. Die Philosophie der Mathematik wurde durch die umfangreichen Entdeckungen mathematischen Neulands — wir erwähnen nur die nichteuklidische Geometrie, die Mengenlehre, die Gruppentheorie, die abstrakte Algebra — nicht nur aus dem allgemeinen Grunde bereichert, weil jede wesentliche Vermehrung des einzelwissenschaftlichen Materials die wissenschaftstheoretische Problematik der betreffenden Einzelwirtschaft vertieft[2]), son-

1) Vgl. A. Müller, Einl. i. d. Philos. S. 79 ff.

2) Wir bringen hierfür ein Beispiel aus der Wissenschaftstheorie der Mathematik: Die wissenschaftstheoretische Problematik der Mathematik erfuhr eine Vertiefung durch die Gruppentheorie und die abstrakte Algebra. In diesen Disziplinen wird gearbeitet mit sog. „abstrakten" Gegenständen, nämlich mit abstrakten „Bereichen" (Gruppe, Halbgruppe, Ring, Integritätsbereich, Körper usw.). Ein abstrakter Bereich stellt eine Verbindung dar zwischen einer Menge von Elementen, über deren besondere Beschaffenheit nichts ausgesagt wird — es handelt sich also um „beliebige" Elemente und nicht etwa um bestimmte „konkrete" mathematische Elemente wie Zahlen usw. —, mit einer (aus ein oder zwei Elementen bestehenden) Menge von Operationen (Verknüpfungen), über deren besondere Beschaffenheit ebenfalls nichts ausgesagt wird — es handelt sich also auch um „beliebige" Operationen, nicht etwa um bestimmte „konkrete" mathematische Operationen wie Addition, Multiplikation usw. —; für die besondere Art eines solchen Bereiches (ob Gruppe oder Körper usw.) sind bestimmte Axiome charakteristisch, welche das Vorhandensein bestimmter Relationen zwischen den durch die (beliebigen) Operationen miteinander verknüpfbaren (beliebigen) Elementen zum Ausdruck bringen. Das wissenschaftstheoretische Problem, das mit der Einführung dieser abstrakten Gegenstände gegeben ist, ist dies: Sind die Relationen bezw. die Axiome das Charakteristische der mathematischen Gegenständlichkeit, m. a. W.: ist die Mathematik (oder speziell die Algebra) reine Relationstheorie bezw. reine Axiomatik, oder sind

dern auch aus dem besonderen Grunde, weil die neuentdeckten mathematischen Gebiete bestimmte Probleme enthalten, die neben ihrer mathematischen auch eine philosophische Seite besitzen [3]).

Durch die Eigenständigkeit sowie durch den größeren Umfang und reicheren Inhalt des Problemkreises unterscheidet sich also die Philosophie der Mathematik der letzten Jahrzehnte von der älteren. Soweit Philosophie der Mathematik bei einem Denker früherer Zeit eine erwähnenswerte Rolle spielt, steht sie durchaus im Dienste allgemeinphilosophischer, vor allem erkenntnistheoretischer Probleme, und ihr Sinn erfüllt sich in dieser Zweckgebundenheit; sie umfaßt dann naturgemäß nur solche Fragen, die für das übergeordnete allgemeinphilosophische Ziel von Belang sind. In diesen Grenzen jedoch begegnet uns Philosophie der Mathematik in der Philosophiegeschichte, und gerade auch bei den hervorragendsten Denkern häufig, was uns nicht wundern kann, da doch das Eigenartige der Mathematik: daß sie in einem von keiner anderen Wissenschaft erreichten Grade Erkenntnis vermittelt, über deren Wahrheit absolute Gewißheit herrscht, vom Philosophen geradezu das Bestreben erzwingt, ihr Wesen zu ergründen, sie um das Geheimnis ihres Erfolges zu befragen, um aus dem Einblick in dieses Geheimnis neue Wege für das Bemühen der „Weltweisheit" — um Kants Ausdruck zu gebrauchen — finden zu können, deren höchstes Ziel ja auch die Erkenntnis unbezweifelbarer Wahrheiten ist. Das sicher tief begründete und berechtigte Gefühl von einer irgendwie gearteten Vorbildlichkeit der Mathematik für die Weltweisheit, ja vielleicht für jedes wissenschaftliche Erkennen, war immer wieder in der Geschichte der Philosophie mitbestimmend für die philosophische Forschungsweise. „Die klassischen Erkenntnistheoretiker haben bei ihrer Frage nach dem Wesen der Wissenschaft und der Wahrheit sich in erster Linie an dem Wesen und der Wahrheit der Mathematik orientiert" [4]). Aber nicht immer hat jenes Gefühl zu echter Philosophie der Mathematik geführt, deshalb nicht, weil oft die Gründe für die Vorbildlichkeit der Mathematik völlig außer acht gelassen wurden und der Führung dieser Wissenschaft, wohin auch der Weg gehen mochte, blindes Vertrauen geschenkt wurde. In solchen Fällen kam das zustande, was wir heute als mathematische Philosophie bezeichnen.

---

doch die „konkreten" mathematischen Gegenstände, also z. B. die Zahlen, die spezifisch mathematischen Gegenstände, oder wie anders ist der Sachverhalt? Wir werden diese Frage am Schluß der Arbeit noch einmal kurz berühren. (Wissenschaftstheoretische Fragen der Gruppentheorie sind behandelt in der Dissertation von F. Rosenthal „Über die logische und erkenntnistheoretische Bedeutung des mathematischen Gruppenbegriffs", Jena 1928).

3) Hier wäre vor allem die Mengenlehre zu nennen. Denn z. B. das Problem „Menge und Zahl" (auf das wir in II noch einmal zurückkommen werden) kann einen rein mathematischen, aber auch einen wissenschaftstheoretischen, also philosophischen, Sinn haben. Die sog. „Paradoxien der Mengenlehre" greifen vollends in innerlogische Problematik ein. — Die nichteuklidische Geometrie — um noch ein anderes Beispiel herauszugreifen — bot notwendig den Anlaß, die Frage nach dem Verhältnis des mathematischen Raums zum physikalischen und damit die umfassendere Frage nach dem Verhältnis von mathematischer und sinnlicher Wirklichkeit erneut zu stellen.

4) Liebert, S. 29.

Die mathematische Philosophie beruht auf dem irrigen Glauben an die Übertragbarkeit der mathematischen Methode auf das Gesamtgebiet oder zum mindesten auf einen Teilbereich der Philosophie. Dieser Irrglaube ist Wesensbestandteil des Rationalismus der vorkantischen Zeit wie auch der in jüngerer Zeit entstandenen sog. „theoretischen Logik", die man auch „Algebra der Logik", „logischen Algorithmus" oder kurz „Logistik" nennt[5]). Die „theoretische Logik" sieht ihre Aufgabe und ihr Ziel in der „Anwendung der formalen Methode der Mathematik auf das Gebiet der Logik. ... Was durch die Formelsprache in der Mathematik erreicht wird, das soll auch in der theoretischen Logik durch diese erzielt werden, nämlich eine exakte wissenschaftliche Behandlung ihres Gegenstandes"[6]). Die auf diese Weise mathematisierte Logik soll ihrerseits dann wiederum als „Hilfsmittel der mathematischen Grundlagenforschung" dienen[7]). Die Logistik setzt also entweder wie die rationalistische Philosophie die Identität von Mathematik und Logik ohne Beweis voraus, oder sie hält, wenn sie diese Voraussetzung nicht macht, Übertragbarkeit der wissenschaftlichen Methode der Mathematik auf das Gebiet der Logik trotz gegenständlicher Unterschiedlichkeit der beiden Wissenschaften für möglich. Letzteres wäre jedoch ein unberechtigtes Außerachtlassen der grundlegenden wissenschaftstheoretischen Tatsache, daß die Methode einer Wissenschaft abhängig ist vom Gegenstand und nicht umgekehrt[8]). Wem aber die Mathematik als reine Logik gilt, der denkt nur folgerichtig, wenn er die Logik in methodischer Hinsicht für mathematisierbar hält, da in Gebieten, deren Gegenstände sich als die gleichen erweisen, auch die gleiche Methode muß Anwendung finden können. Oft wird auch die Logistik als Grundwissenschaft sowohl für die Logik als auch für die Mathematik oder als verbindende Grenzwissenschaft zwischen beiden Gebieten angesehen. Das eine wie das andere bedeutet aber zum mindesten irgendwie ein Verwischen der gegenstandsbestimmten Grenzen der Wissenschaften[9]).

Für Leibniz — um den Hauptvertreter der vorkantischen rationalistischen Philosophie der Neuzeit zu nennen — beruht die Mathematik auf nichts anderem als auf Grundsätzen der Logik. In seinem 2. Schreiben an Clarke heißt es: „Das große Fundament der Mathematik ist der Satz des Widerspruchs oder der Identität; dieses einzige Prinzip genügt, die ganze Arithmetik und die ganze Geometrie, das will sagen, alle mathematischen Prinzipien abzuleiten"[10]).

---

5) Vgl. A. Müller, Gegenstand d. Mathematik, S. 11 ff. und Einl. i. d. Phil., S. 77 ff.

6) Hilbert-Ackermann, S. 1.

7) Vgl. hierzu auch A. Heyting, S. 1: „Nach der logistischen Auffassung ist die Mathematik ein Zweig der Logik. Es entstanden so die mathematischen Probleme, erstens die Logik exakt auszubauen, zweitens die Mathematik aus der Logik wirklich zu entwickeln. An diesen formalen Aufbau schließen sich dann die „metamathematischen" Untersuchungen an, in denen der formale Apparat an sich, ohne Rücksicht auf seine inhaltliche Bedeutung, auf seine Struktur untersucht wird."

8) Vgl. unten S. 10.

9) Zur Beurteilung der Logistik vgl. auch Geyser, Logistik und Relationslogik, S. 140 ff.

10) Zitiert bei Riehl, S. 118.

Die meisten „Logistiker", etwa Russell, Frege, Dedekind, Hilbert, würden diese Äußerungen Leibnizens von ihrem Standpunkt aus unterschreiben müssen. Während auf Mathematisieren der Logik das Bestreben der Logistik gerichtet ist, reichen die Mathematisierungstendenzen im Rationalismus grundsätzlich noch weiter, da dieser selbst in die Gebiete der Metaphysik und Ethik vorzudringen versucht mit Hilfe der mathematischen Methode. Der rationalistischen Metaphysik dient „die mathematische Ordnung der Sätze und Beweise zur Richtschnur und zum Vorbild ihrer Methode; es entsteht Metaphysik nach dem Vorbild der Mathematik, sei es in freier, sei es in förmlicher Nachahmung" [11]). Der Grund liegt darin, daß im Rationalismus zur Identifizierung von Mathematik und Logik noch die Identifizierung von Logik und Philosophie hinzukommt. Die reine Logik, als Disziplin der reinen ratio, vermittelt für den Rationalismus nicht nur formal richtige Erkenntnisse, sondern wahre Erkenntnisse über Gegenstände des physischen wie des metaphysischen und ethischen Bereichs. Die logischen Grundsätze beherrschen die gesamte Wirklichkeit. Alles ist wirklich, was sich aus wenigen zugrundeliegenden Axiomen widerspruchsfrei folgern läßt, gleichgültig, um welchen Bereich der Wirklichkeit es sich handelt. „Auf dem Wege des rein begrifflichen Denkens" glaubt der Rationalismus „in das metaphysische Gebiet eindringen zu können. Aus formalen Prinzipien leitet er materiale Sätze her, aus bloßen Begriffen deduziert er Erkenntnisse" [12]). Infolge der Identifikation von Mathematik und Logik einerseits, Logik und Philosophie andererseits, geht das Streben der Rationalisten stets auf ein Philosophieren „more geometrico" (Spinoza) hin. Sie beanspruchen „auf die Philosophie die mathematische Methode anzuwenden, als ob sie die einzige logische und apodiktische Methode wäre" [13]).

Die heutige Logistik beschränkt ihre Mathematisierungstendenzen auf den logischen Bereich, da ihre Vertreter durchweg der Metaphysik, wenn nicht ablehnend oder gar feindlich, so doch gleichgültig gegenüberstehen. Was jedoch die „förmliche Nachahmung" der mathematischen Methode in der Logik anbetrifft, so ist hierin die Logistik sehr viel weiter vorgedrungen, als es je im rationalistischen Zeitalter der Fall war und sein konnte. Jedoch interessieren uns die Unterschiede zwischen vorkantischem Rationalismus und heutiger mathematischer Philosophie in diesem Zusammenhang weniger als das beiden Gemeinsame. Dieses Gemeinsame: die Voraussetzung der Identität von Mathematik und Logik, ist durchaus anfechtbar. Sie ist nirgends bewiesen, müßte aber bewiesen werden, da die beiden Wissenschaften, so wie wir sie faktisch vorfinden, Verschiedenheiten mannigfacher Art zeigen. Einen Identitätsbeweis könnte aber doch nur die philosophische Untersuchung der Mathematik, also die „Philosophie der Mathematik", die somit jeder mathematischen Philosophie voranzugehen hätte, liefern. Wo also immer Mathematik zum Nutzen der Philosophie verwandt werden soll, ist Philosophie der Mathematik notwendige Voraussetzung dieser Verwendung, damit sie in der rechten Weise vor sich gehe. Wir können auch hier schon ausdrücklich vorwegnehmen, was übrigens in unse-

11) Kuno Fischer, Bd. 1, S. 24.
12) Hessen, S. 50.
13) Couturat, S. 249 f.

ren bisherigen Ausführungen bereits unausdrücklich enthalten ist, daß die Philosophie der Mathematik nicht zum Erweis der Identität von Mathematik und Logik, sondern zum Erweis des Gegenteils führt, was in der Gegenwart mit letzter Klarheit (von Rickert) gezeigt worden ist, worauf wir später noch einmal kurz zurückzukommen die Gelegenheit finden werden.

Wie der Rationalismus, so ist auch der Empirismus der vorkantischen Zeit in seinem Wesen entscheidend bestimmt von der Einsicht in die Vorbildlichkeit der Mathematik. Aber diese Einsicht führt für ihn zu einer anderen Konsequenz als für den Rationalismus. Dieser versucht die Metaphysik zu mathematisieren, damit sie den gleichen Grad der Wissenschaftlichkeit wie die Mathematik erlange; jener lehnt die Metaphysik ab, weil er sie nicht für mathematisierbar hält und sie daher nicht als echte Wissenschaft ansehen kann. Es gibt für den Empirismus außerhalb der Mathematik keine streng wissenschaftlichen Urteile. War in der vorkantischen neuzeitlichen Philosophie die gleiche Auffassung von der Mathematik für die beiden extremen Richtungen Empirismus und Rationalismus wesensbestimmend, so können wir heute beobachten, daß bei den Logistikern, also bei Vertretern rein rationalistischer oder logizistischer Theorien der Mathematik Rationalismus und Empirismus oft eine eigenartige Verbindung eingehen. Die heutigen Logistiker sind, soweit außerlogische philosophische Bereiche in Betracht kommen — auf die Metaphysikfeindlichkeit wurde schon hingewiesen —, Empiristen und Positivisten. Davon zeugt etwa die Zeitschrift „Erkenntnis". Besonders offen und unmißverständlich tritt die genannte Verbindung von logizistischer Auffassung der Mathematik mit Empirismus außerhalb der Logik und Mathematik z. B. in der kleinen Schrift von Hans Hahn über „Logik, Mathematik und Naturerkennen" zu Tage. Hier wird in Bezug auf das Naturerkennen die Beobachtung als einzige Quelle unseres Wissens hingestellt [14]) und in Bezug auf das Verhältnis von Logik und Mathematik behauptet, daß „die Sätze der Mathematik von ganz derselben Art" seien, „wie die Sätze der Logik", nämlich „tautologisch" [15]). Ja im Grunde ist bei Hahn die Auffassung der Logik und somit auch der Mathematik, die als reine Logik gilt, selbst empiristisch und positivistisch, weil nominalistisch. Denn die Sätze der Mathematik „sagen gar nichts von den Gegenständen aus, von denen wir sprechen wollen, sondern sie handeln nur von der Art, wie wir über diese Gegenstände sprechen wollen" [16]), wie auch die Logik „überhaupt nicht von irgendwelchen Gegenständen" handelt, sondern „nur von der Art, wie wir über die Gegenstände sprechen" [17]). Die Sicherheit von Logik und Mathematik gründet in nichts anderem als in gewissen Verabredungen, die getroffen werden über den Gebrauch von Worten, worunter in Wahrheit nichts anderes verstanden wird als die sinnlichen (akustischen oder optischen) Wortzeichen (in der Mathematik die Zahlzeichen). Der Sinn von Mathematik und Logik erschöpft sich in

14) S. 10.

15) S. 17. — (Vgl. Burkamp, S. 156: „Die ganze Mathematik ist eine riesige Anhäufung von Tautologien, was natürlich nicht die Mathematik entwertet, sondern die Tautologie bewertet."

16) S. 17.

17) S. 10.

ihrer Dienststellung für die empirische Forschung; und sie sind auch für diese nur deshalb notwendig, „weil wir nicht allwissend sind.... Ein allwissendes Wesen braucht keine Logik und Mathematik“ [18]). Auch etwa die Russellsche Theorie der Zahl, in welcher die Zahl aus logischen Gegenständen („Klassen“) abgeleitet wird, scheint sich, wie Aloys Müller bemerkt [19]), „als die Umdeutung einer psychologischen Theorie der Entstehung der Zahlen in eine logische Theorie der Zahl darzustellen“. (Auf eine gewisse Verwandtschaft zwischen empiristischer und logizistischer Theorie der Zahl weist auch Cassirer hin [20]): „Mit der empiristischen Anschauung vom Wesen der Zahl, die sie [21]) aufs schärfste bekämpft, begegnet die Theorie sich dennoch in einem formalen Moment: auch sie faßt die Zahl als eine ‚gemeinsame Eigenschaft‘ gewisser Inhalte und Inhaltsgruppen.“) Wie sehr z. B. auch in der Hilbertschen „Gestalttheorie“ der Zahl Psychologistisches und Empiristisches eine Rolle spielt, hat ebenfalls Müller gezeigt [22]). (Allerdings ist bei Hilbert nicht mit letzter Klarheit erkennbar, was er unter „Zeichen“, welchen Begriff er zur Definition des Begriffes Zahl benutzt, versteht. „Das Zeichen 1 ist eine Zahl. Das Zeichen 1 + 1 ist eine Zahl.“ usw. Ist 1 als sinnliches Zeichen oder als geometrische Figur gedacht, oder als was sonst?)

Immanuel Kant — dessen Philosophie der Arithmetik den Gegenstand dieser Arbeit bildet — hat das oben dargelegte grundsätzliche Verhältnis von Philosophie und Mathematik vollkommen klar erkannt. In der Vorrede einer seiner Schriften der vorkritischen Zeit — es handelt sich um die erste Schrift Kants, in der ein Gegenstand der Arithmetik philosophischer Betrachtung unterworfen wird; sie wurde im Jahre 1763 veröffentlicht und trägt den Titel: „Versuch den Begriff der negativen Größen in die Weltweisheit einzuführen“ — schreibt er: „Der Gebrauch, den man in der Weltweisheit von der Mathematik machen kann, besteht entweder in der Nachahmung ihrer Methode, oder in der wirklichen Anwendung ihrer Sätze auf die Gegenstände der Philosophie. Man sieht nicht, daß der erstere bis daher von einigem Nutzen gewesen sei, so großen Vortheil man sich auch anfänglich davon versprach.... Der zweite Gebrauch ist dagegen für die Theile der Weltweisheit, die er betroffen hat, desto vortheilhafter geworden, welche dadurch, daß sie die Lehren der Mathematik in ihren Nutzen verwandten, sich zu einer Höhe geschwungen haben, darauf sie sonst keinen Anspruch hätten machen können“ [23]). „Nachahmung“ der mathematischen Methode in der Weltweisheit — das eben ist das Wesen mathematischer Philosophie. „Anwendung“ mathematischer Sätze auf die Gegenstände der Philosophie — das setzt, so wie Kant diese „Anwendung“ versteht, echte Philosophie der Mathematik voraus. Kants philosophisches Werk, insbesondere seine erste kritische Hauptschrift, aber auch schon die vorkritische Schrift über die negativen Größen und andere Arbeiten der vorkritischen Zeit, sind uns Zeugnis da-

18) S. 18.
19) Gegenstand der Mathematik, S. 45.
20) Substanzbegriff und Funktionsbegriff, S. 60.
21) Es ist die Rede von der (logizistischen) „Klassentheorie“ der Zahl.
22) Annalen der Philosophie. 4. Bd.
23) Werke, Bd. 2, S. 167.

für, wie die Anwendung der Mathematik zum Nutzen der Philosophie nach Kants Meinung vonstatten zu gehen hat. In der transzendentalen Methodenlehre der Kr. d. V. spricht er es noch einmal ausdrücklich, diesmal nicht mehr als eine methodische Voraussetzung, sondern als ein Ergebnis seines kritischen Unternehmens (das Ergebnis bestätigt die Zweckmäßigkeit und Notwendigkeit der metheodischen Voraussetzung) aus: daß man über Mathematik, nicht aber mathematisch philosophieren solle, wolle man durch Mathematik der Philosophie nützen. Gegen „die Meister jener Kunst", mathematische Methode wie auf dem „Felde der Sinnlichkeit", so sogar auf dem „unsicheren Boden reiner und transzendenter Begriffe" anzuwenden, führt er aus: „Denn da sie kaum jemals über ihre Mathematik philosophirt haben (ein schweres Geschäfte!), so kommt ihnen der specifische Unterschied des einen Vernunftgebrauchs von dem andern gar nicht in Sinn und Gedanken" [24]). Damit gibt Kant deutlich zu erkennen, wie weit er hinsichtlich der Stellung zur Mathematik über den Rationalismus, gegen den diese Äußerungen gerichtet sind, hinausgekommen ist. Zwar fungiert auch für ihn „die mathematische Wahrheitsidee" wie beim Rationalismus „als Leitgedanke" für die Erkenntnistheorie. Aber „für ihn hat die Mathematik nicht mehr ganz jene leitende und orientierende Kraft. Sie wird vielmehr selber ein Gegenstand für die kritische Untersuchung; auch sie muß sich vor dem Richterstuhl der Vernunft ausweisen; auch sie wird in Bezug auf ihre „Möglichkeit" untersucht" [25]). Auch Kant zweifelte nicht im geringsten an der Vorbildlichkeit der Mathematik [26]), aber er fragte nach den Gründen der Vorbildlichkeit mit einer Zielsicherheit, die weder der Rationalismus noch der Empirismus kannte. Im gleichen Maße, wie durch Kant, was die Stellung der Mathematik in der Philosophie angeht, der Rationalismus, der die Zeit vor ihm beherrschte, und von dem er selbst ausgegangen war, überwunden ist, ist auch die mathematische Philosophie der Gegenwart durch ihn im Prinzip bereits überwunden. Denn die Grenzen der Wissenschaften zu verwischen, sei es, indem man die Unterschiede in den Gegenständen nicht sieht, oder sei es, indem man trotz der Erkenntnis gegenständlicher Unterschiedlichkeit die gleichen Methoden in verschiedenen Wissenschaften für anwendbar hält, ist, wie Kant mit aller Schärfe gesehen hat, ein prinzipieller Fehler. Nur falsche oder nutzlose Resultate können durch solche Verwischung erzielt werden. Wir enthalten uns vorläufig jedes Urteils über den I n h a l t der Kantschen Philosophie der Mathematik, betonen vielmehr lediglich die prinzipielle methodische Richtigkeit seines Strebens nach sorgfältiger Scheidung der Wissenschaften, die wir heute noch vielfach trotz Wissenschafts- und Gegenstandstheorie vermissen. Wir dürfen wohl glauben, daß in dem lebendigen Bemühen der Gegenwart um Klärung mathematischer Grundlagenprobleme — die immer philosophische Probleme sind, auch wenn

---

24) Werke, Bd. 3, S. 476.

25) Liebert, S. 76; vgl. auch S. 75.

26) Vgl. Kants begeisterte Äußerung über Plato, den Mathematiker und Philosophen, zit. bei Menzel, S. 2f., und Menzels weitere Ausführungen über die Bedeutung der Mathematik in Kants Philosophie a.a.O.

sich an den Lösungsversuchen Mathematiker beteiligen[27]) — eine Orientierung über Grundfragen des Philosophierens an den großen Denkern der Vergangenheit nur von Nutzen sein kann. Kant insbesondere mag uns deshalb auch heute manches Aufschlußreiche zu den brennenden Fragen unseres Problemkreises sagen können, weil er uns — und nicht nur zeitlich — noch relativ nahesteht, weil direkte Wege von ihm in die Gegenwart führen. Eine Menge seiner Fragestellungen zur Philosophie der Mathematik haben Eingang gefunden in die Auseinandersetzungen der Gegenwart und leben in ihnen weiter. Ein doppelter wissenschaftlich fruchtbarer Ertrag könnte daraus erwachsen, vom gegenwärtigen problem- und spannungsreichen Zustand der Philosophie der Mathematik her den Blick zu lenken auf die Aussagen eines Großen vergangener Zeit über Probleme dieser Disziplin. Es könnte einerseits gelingen, „aus der höchsten Kraft der Gegenwart" das Vergangene neu zu deuten, und es könnte andererseits vom Vergangenen her in die Fülle des Gegenwärtigen neue Klarheit hineingetragen werden.

Wir möchten wenigstens den Weg beschreiten, der zu solchem Ziele führen kann. Dieser Weg scheint uns dann am sichersten vorgezeichnet, wenn wir unseren Ausgang nehmen vom Problemkreis der Philosophie der Arithmetik, wie er sich uns heute darstellt, und diesen als unseren Blickpunkt wählen. Nicht notwendig wird es sein, uns seinen ganzen Inhalt zu vergegenwärtigen, wohl aber, die Grundprobleme — und die Grundprobleme werden uns auch nachher bei Kant wieder begegnen — in moderner Form scharf herauszustellen, um so gerüstet zu sein, an Kant die Fragen zu stellen, auf die das Gegenwartsinteresse Antwort erheischt. Die bei Kant vorgefundenen Ergebnisse werden wir dann hinwiederum in Vergleich setzen zu den heute bestehenden Hauptströmungen in der Philosophie der Arithmetik — auf die wir dann also kurz einzugehen haben werden —, um dadurch eine Vorstellung von der Enge und dem Verwandtschaftsgrad der Beziehungen zwischen der Philosophie der Arithmetik Kants und der gegenwärtigen zu gewinnen. Somit wird der Kreis sich alsdann schließen, der also von der Gegenwart zu Kant und von Kant wieder hin zur Gegenwart führt.

II.

Die Philosophie der Arithmetik besteht aus einem allgemeinen und einem besonderen Teil. Der allgemeine Teil enthält alle philosophischen Aussagen über Mathematik, die für alle mathematischen Disziplinen, also auch für die Arithmetik, gültig sind; der besondere Teil enthält alle Aussagen der Philosophie der Mathematik, die speziell auf die Arithmetik bezogen sind.

Unseren Ausführungen des vorigen Abschnitts ist bereits zu entnehmen, daß Philosophie der Mathematik im Wesentlichen Wis-

27) Mit Recht bemerkt Ternus, daß „die Mathematiker der jüngsten Zeit — von den Philosophen meist im Stich gelassen — selber die Erörterungen ihrer wissenschaftstheoretischen Prinzipien an sich gerissen haben, ohne sich vielfach um die philosophische Tragweite bezw. Untragbarkeit ihrer Aufstellungen klar zu sein" (S. 228).

senschaftstheorie der Mathematik ist. Selbstverständlich setzt die Wissenschaftstheorie der Mathematik — gemäß der Definition der Wissenschaftstheorie, die wir zugrunde legen wollen [28]) — eine Ontologie und Gegenstandstheorie [29]) des Mathematischen voraus oder begreift sie in sich. Was die Philosophie der Mathematik etwa von der Naturphilosophie oder der Geschichtsphilosophie unterscheidet, ist der Umstand, daß keinerlei metaphysische Fragen in ihr einen Sinn haben können, weil es nämlich im Mathematischen den Unterschied zwischen Phänomenologischem und Metaphysischem [30]), zwischen Erscheinung und „Ding an sich", nicht gibt. Die mathematischen Gegenstände sind genau so, wie sie uns „erscheinen", d. h. wie sie uns gegeben sind. Das bedürfte kaum einer besonderen Erwähnung, wenn nicht bei Kant, wie wir später sehen werden, die Philosophie der Mathematik in Metaphysisches eingebettet wäre.

Bei jeder wissenschaftstheoretischen Untersuchung sind eine Reihe von methodischen Prinzipien, die durch den Gegenstand der Wissenschaftstheorie bedingt sind, zu beachten. Wir weisen auf drei, die wohl die wichtigsten sind, besonders hin.

Das erste lautet: Die Wissenschaftstheorie muß „die Wissenschaften einfach nehmen, wie sie sind. Sie schreibt ihnen nicht das Geringste vor, sondern studiert sie bloß" [31]).

28) Vgl. oben S. 1.

29) Wir gebrauchen diese Begriffe im Sinne der Definitionen von Aloys Müller: „Die Ontologie handelt von den Gegenständen als Gegenständen. . . Sie weist die allgemeinen Bestimmtheiten auf, die ihnen als Gegenständen zukommen. Unter diesen Bestimmtheiten sind solche, die für jeden Gegenstand einer Wirklichkeitssphäre charakteristisch sind; ihre Untersuchung gehört in die allgemeine Ontologie, Die übrigen Bestimmtheiten stellt die besondere Ontologie fest. — Die Ontologie faßt die Gegenstandstheorie in sich. Die Gegenstandstheorie untersucht nur den Typus der Gegenstände. Die Ontologie interessiert sich dazu noch für die allgemeinen typischen Beziehungen in und zwischen den Bereichen der Gegenstände" (Ein. i. d. Phil., S. 31). Was ist ein „Gegenstand", was ist eine „Bestimmtheit"? Der Sinn, in welchem wir den Begriff „Gegenstand" verwenden, ist durch den bisherigen Gebrauch bereits klar: „Gegenstand ist alles, was Subjekt eines Urteils werden kann. — Bestimmtheit nennen wir alles, was sich von einem Gegenstand aussagen läßt" (a.a.O.). Wir fügen noch die Definitionen der Begriffe „Eigenschaft" und „Kategorie" hinzu, die mit den vorigen in engstem Zusammenhang stehen: „Eigenschaft meint eine dem Gegenstand immer zukommende Bestimmtheit" (a.a.O.). „Wir nennen . . . solche allgemeinsten Gegenstandsbestimmtheiten, die letzte, nicht mehr definierbare, nicht mehr in Elemente zerlegbare Begriffe darstellen, Kategorien" (Müller, Gegenstand der Mathematik, S. 10).

30) „Phänomenologisch meint das schlicht Gegebene" (Müller, Psychologie, S. 15). Dieses besitzt in dem Fall, daß es sich um Reales (Physisches oder Psychisches) handelt, den „Charakter des Unmetaphysischen" (a.a.O.), d. h. es gibt ein Metaphysisches, Substanzielles, das den Seinsgrund des Phänomenologischen bildet.

31) Müller, Einl. i. d. Phil., S. 80. — Vgl. E. Herrigel: Eine logische Untersuchung hat „in den Betrieb und die Begriffsbildung einer Einzelwissenschaft nichts hineinzureden . . . Würde sie dies tun, so hörte sie entweder auf, logische Untersuchung zu sein oder sie wäre notwendig falsch. Die Auffassung und die Resultate der Einzelwissenschaft hat sie als gültig hinzunehmen, ohne an ihnen Kritik üben oder andere an deren Stelle setzen zu dürfen" (S. 93 f.).

Das zweite Prinzip betrifft das Verhältnis von Gegenstand und Methode der Wissenschaften. Die Methode einer Wissenschaft ist immer abhängig vom Gegenstand dieser Wissenschaft. Der Gegenstand dagegen ist völlig unabhängig von der Methode. Er „verlangt ... die zu ihm passende Methode der Erforschung“ [32]). Daraus folgt, daß bei jeder wissenschaftstheoretischen Untersuchung das Interesse primär auf den Gegenstand und erst in zweiter Linie auf die Methode der Wissenschaft gerichtet sein muß [33]).

Sodann weisen wir noch auf die Selbstverständlichkeit hin — die häufig unbeachtet geblieben ist, weshalb wir sie hier als besonderes Prinzip herausstellen —: daß die logische und ontologische Frage nach der allgemeinen Beschaffenheit des Gegenstandes scharf zu trennen ist von der psychologischen Frage, auf welche Weise der Gegenstand vom Ich erfaßt wird. Immer wieder kann man feststellen, wie bei Strukturuntersuchungen Psychologisches in die ontologische Bestimmung der Gegenstände hineingenommen wird [34]).

Gemäß diesen Prinzipien muß die Philosophie der Mathematik die Gegenstände und Ergebnisse der Mathematik, soweit sie wirklich rein mathematisch sind, so, wie sie sie vorfindet, einfach hinnehmen. Ihre primäre Aufgabe ist es, die allgemeine logische Struktur der mathematischen Gegenstände zu untersuchen, d. h. festzustellen, welche allgemeinen Bestimmtheiten [35]) allen mathematischen Gegenständen zukommen, welches die allgemeinen Kategorien [35]) des Mathematischen sind. Auf Grund der Gegenstandscharakteristik ist dann die durch den Gegenstand eindeutig und mit Notwendigkeit bestimmte mathematische Methode zu erschließen und zu beschreiben.

Grundfragen der Philosophie der Mathematik werden immer die Fragen nach dem Verhältnis von Mathematik und Logik und nach dem Verhältnis von Mathematik und Naturwissenschaft bleiben. In gegenstandstheoretischer Wendung lauten sie: Sind die mathematischen Gegenstände rein logische Gebilde oder aus solchen ableitbar, m. a. W.: Besitzen mathematische und logische Gegenstände die gleichen allgemeinen Kategorien, oder nicht? Ist es für den Gegenstandscharakter der mathematischen Gegenstände wesentlich oder unwesentlich, daß sie „Ähnlichkeit“ mit sinnlichen Gegenständen — die ohne Zweifel in gewissem Sinne vorhanden ist [36]) — aufweisen, daß Mathematik in der Naturwirklichkeit und in der Naturwissenschaft anwendbar ist [37]), sind die mathematischen Gegenstände we-

32) Müller, a.a.O., S. 80.

33) Vgl. Müller, Strukturwissenschaft und Kulturwissenschaft (Auseinandersetzung, besonders mit Rickert, über das Problem Gegenstand — Methode), S. 59 f. Weil das primäre Moment, das eine Wissenschaft charakterisiert, ihr Gegenstand, das sekundäre die Methode ist, „ist es auch unmöglich, daß zwei Wissenschaften denselben Gegenstand haben und sich nur formal unterscheiden“ (S. 60). Vgl. unsere Ausführungen in I über das Verhältnis von Mathematik und Philosophie (bezw. Mathematik und Logik).

34) Vgl. oben S. 6.

35) Vgl. oben S. 9, Anm. 29.

36) Offenbar kann man von einer Ähnlichkeit zwischen geometrischen Gebilden (Geraden, Kreisen, Dreiecken usw.) und sinnlichen Gebilden (etwa gezeichneten Geraden, Kreisen, Dreiecken usw.) reden. Vgl. Behn, S. 26 ff.

37) Als simpelstes Beispiel erwähnen wir die Zählbarkeit der sinnlichen Dinge.

gen ihrer Ähnlichkeit mit Erfahrungsgegenständen vielleicht als Gebilde empirischen Ursprungs oder als vom Empirischen mitbestimmt zu betrachten? Bei der Beantwortung dieser letzten Fragen ist streng das dritte der oben genannten wissenschaftstheoretischen Prinzipien zu beachten, damit nicht eine psychologische Antwort als ontologische genommen wird. Wir bemerken noch — um den Zusammenhang dieser Fragenkomplexe mit Kantschen Problemstellungen hier wenigstens anzudeuten —, daß mit dem Problem „Mathematik und Logik" die Frage nach dem „analytischen" oder „synthetischen" Charakter der mathematischen Urteile engstens zusammenhängt, während in das Problem „Mathematik und sinnliche Wirklichkeit" („Mathematik und Naturwissenschaft") die Frage des „Apriorischen" und des „Aposteriorischen" in der mathematischen Gegenständlichkeit hineinspielt. — Mehr brauchen wir hier über den Problembereich des allgemeinen Teiles[38]) der Philosophie der Arithmetik nicht auszuführen.

Im Mittelpunkt des speziellen Teiles der Philosophie der Arithemetik stehen die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... Die Reihe der natürlichen Zahlen bildet das Fundament der Arithmetik; denn es ist nicht möglich, wie versucht worden ist, die natürlichen Zahlen aus ihrer logischen Struktur nach einfacheren mathematischen Gegenständen mathematisch abzuleiten. Alle darauf ausgehenden Versuche haben ergeben, daß die vermeintlich einfacheren Gebilde die Zahlen schon voraussetzen. Der Mathematiker nimmt deshalb die natürlichen Zahlen als letzte Gegebenheiten hin und baut aus ihnen unter Zuhilfenahme der arithmetischen Operationen und unter Anwendung der logischen Grundsätze das Gebäude der mathematischen Zahlentheorie auf. Auch der Philosoph hat die Reihe der natürlichen Zahlen zunächst als ein mathematisches Fundament zu betrachten und als letzte mathematische Gegebenheit der Arithmetik hinzunehmen. Philosophie der Arithmetik ist daher in weitem Umfang und in erster Linie Philosophie der Zahl.

Der Philosoph kann und wird nun aber seinerseits die Frage aufwerfen, die zweifellos über den Rahmen der Mathematik hinausgeht, ob es logisch einfachere außermathematische Gegenstände als Grundlage der Zahlen gibt. Die Frage ist tatsächlich gestellt und auch in bejahendem Sinne beantwortet worden. Beispielsweise glaubt Russell die Zahl aus der „Menge" oder „Klasse", die er als Gegenstand der Logik ansieht — worin er übrigens bereits irrt[39]) — ableiten zu können. Für ihn ist somit Arithmetik in ihren Fundamenten zurückgeführt auf reine Logik. Die Russellsche Theorie ist oft und aus zwingenden Gründen widerlegt worden[40]). Wir erwähnten sie hier nur als bekanntes Beispiel eines Versuchs, das Problem „Arithmetik und Logik", das aus einer Philosophie der Arithmetik nicht wegzudenken ist, zu lösen. Dieses Problem enthält insbesondere auch die Frage nach dem Verhältnis von Zahl und Zahlbegriff: Sind die Zahlen selbst Begriffe? (Dann wären sie logische Gebilde.) Sind Zahl und Zahlbegriff identisch? Das Problem „Arith-

38) Vgl. oben S. 8.
39) Vgl. Müller, Gegenstand der Mathematik, S. 47.
40) Vgl. Natorp, S. 112 ff., Cohn, S. 166 ff., Cassirer, Substanzbegriff u. Funktionsbegriff, S. 57 ff., Müller, Gegenstand der Mathematik, S. 43—49.

metik und Logik" wäre mit geklärt, wenn auf irgendeine Art die gesamte Mathematik als reine Logik erweisbar wäre. Ist das nicht der Fall, so könnte doch die Arithmetik als mathematische Sonderdisziplin reine Logik sein, welches Problem, wie gesagt, wesentlich zur Philosophie der Arithmetik gehört. Weiter gehört zu deren engerem Problemkreis die Untersuchung der speziellen Kategorien der natürlichen Zahlen — die Untersuchung der allgemeinen, von allen mathematischen Gegenständen ohne Unterschied aussagbaren, ist Aufgabe der allgemeinen Philosophie der Mathematik — oder der Gebilde, aus denen jene ableitbar sind, vorausgesetzt, daß es solche gibt, weiter die Untersuchung der speziellen Kategorien der aus den natürlichen Zahlen mit dem Ziele der Möglichkeit vollständiger Ausübung der Rechenoperationen abgeleiteten Zahlen (die wir im Folgenden kurz „abgeleitete Zahlen" nennen). Gesetzt, die gegenstandstheoretische Untersuchung der natürlichen Zahlen hätte ergeben, diese seien keine Begriffe, seien überhaupt nicht in irgendeinem Sinne rein logische Gebilde, so wäre zu fragen, ob die abgeleiteten Zahlen, etwa weil sie bei Zugrundelegung der natürlichen Zahlen und der elementaren Rechenoperationen auf sonst rein logischem Wege gefunden sind, reine Begriffe, Gebilde der reinen Logik oder auch bloße Symbole, Zeichen, rein formale Hilfsmittel für die Zahlenlehre, denen keine spezifisch mathematische Gegenständlichkeit zukomme, seien [41]).

Wie das Problem „Mathematik und Logik" das spezielle „Arithmetik und Logik" enthält, so hat auch das Problem „Mathematik und Naturwirklichkeit" bei Spezialisierung auf die Arithmetik noch einen reichen Inhalt. Es besteht die unbezweifelbare Tatsache, daß die natürlichen Zahlen den Gegenständen der sinnlichen Wirklichkeit („eineindeutig") zugeordnet werden können. Nicht so unmittelbar einleuchtend ist die Anwendbarkeit der positiven rationalen Zahlen (soweit sie nicht natürliche sind) im Bereich der realen Gegenstände. Bei der Null und den ganzen oder gebrochenen negativen Zahlen treten schon erhebliche Schwierigkeiten auf. Es wird fraglich, ob von Anwendbarkeit in der realen Wirklichkeit hier sinnvoll geredet werden kann. (Gibt es das „Nichts", gibt es „negative Dinge" in der Außenwelt?) Die Schwierigkeiten steigern sich, wenn man zu irrationalen und imaginären Zahlen fortschreitet. Erinnern wir uns der früher gestellten Frage: „Ist für den Charakter der mathematischen Gegenstände deren Anwendbarkeit in der Naturwirklichkeit wesentlich?", so erkennen wir leicht, daß bei Bejahung dieser Frage auch von dieser Seite her ein wesentlicher Unterschied zwischen natürlichen und abgeleiteten Zahlen zutage treten könnte.

Es ließen sich von der heutigen Problemlage her noch eine Menge von Einzelfragen der Philosophie der Arithmetik aufzählen. Wir haben nur die Kernprobleme herausgegriffen. Diese sind wohl auch immer in der Geschichte der Philosophie die Kernprobleme der Philosophie der Arithmetik gewesen und werden es bleiben. Es sind auch diejenigen, die uns bei einer Untersuchung der Philosophie der Arithmetik Kants, wenn auch in anderer Form, wieder begegnen werden.

41) Zum Problem „Arithmetik und Logik" Behn, S. 94—108, zum allgemeineren Problem „Mathematik und Logik" Behn, S. 84—94 („Von geltenden und idealen Gegenständen").

III.

So wichtig für Kants philosophisches System die Mathematik ist, und so breit der Raum ist, den er ihr widmet und widmen muß, damit das Fundament seines Werkes fest sei — denn seine Philosophie der Mathematik bildet geradezu das Fundament seines gesamten Lehrgebäudes (die Kritik der Urteilskraft eingeschlossen) —, die Arithmetik hat er nur in bescheidenem Umfang berücksichtigt. Vollständigkeit im heutigen Sinne können wir bei Kant aus wissenschaftsgeschichtlichen Gründen von vornherein nicht erwarten, auch strenge Systematik nicht, da ihm Philosophie der Mathematik und der Arithmetik kein selbständiges wissenschaftliches Ziel, sondern Mittel und Weg zu einem allgemeineren philosophischen Endziel ist. Als besonderen Mangel aber müssen wir das Fehlen der Eindeutigkeit in den Aussagen Kants über die Arithmetik und ihren Hauptgegenstand, die Zahl, empfinden. „Kant hat sich nur in vorsichtigen Streifzügen und stets zu schnellem fluchtähnlichen Rückzuge geneigt auf ihr Gebiet gewagt. Seine Meinung über den Zahlbegriff versteckt sich, verklausuliert sich, will wenig beachtet sein und wird wenig beachtet." So bemerkt Michaelis in seiner 1884 veröffentlichten Arbeit „Über Kants Zahlbegriff"[42]). Inzwischen trifft nicht mehr zu, daß Kants Zahlbegriff von der Kantforschung „wenig beachtet wird", wie wir heute überhaupt nicht mehr wie Michaelis beklagen können, daß „die Bedeutung des Zahlbegriffes ... noch keineswegs allgemein von der Philosophie gewürdigt" sei. Gerade um die Zeit, da Michaelis' Arbeit erschien, setzten die philosophischen Diskussionen über arithmetische Grundlagenprobleme ein. Im übrigen aber müssen wir dem allgemeinen Urteil Michaelis' über die Stellung der Arithmetik in Kants Philosophie vollauf zustimmen. Ohne Frage ist Kants philosophische Auffassung von der Mathematik vornehmlich aus der Betrachtung der Geometrie und nicht aus der Arithmetik erwachsen. Man spürt an manchen Stellen, wie die Arithmetik mit ihren Besonderheiten sich nur schwer in das Kantsche System einfügen läßt. Wir werden uns deshalb in Einzelfällen zu fragen haben, ob der Auffassung, die sich aus dem Zwang des Systems — das immer Ausdruck der Denkform seines Schöpfers ist! — ergibt und in diesem ihren Niederschlag gefunden hat, oder gelegentlichen Äußerungen, die gegen das System sprechen — das immer Unvollkommenheiten in sich birgt! —, größeres Gewicht beizulegen ist. Apriori wird das nicht entschieden werden können.

Die wichtigsten Quellen für Kants Philosophie der Arithmetik sind die „Kritik der reinen Vernunft" (wir benutzen beide Auflagen) und die „Prolegomena". Wir brauchen die philosophische Entwicklung Kants nicht zu verfolgen, weil seine Lehre von der Mathematik höchstens unwesentliche Wandlungen durchgemacht hat[43]). Wir werden also unter Zugrundelegung der beiden genannten Werke seine philosophische Theorie der Arithmetik nach systematischen Gesichtspunkten darstellen und frühere und spätere Schriften bezw. Briefstellen nur soweit heranziehen, als in ihnen zu unserem Gegenstand gehörige Probleme enthalten sind, die wir in der „Kritik der reinen Vernunft" und in den „Prolegomena" vermissen, oder soweit

42) S. 3.
43) Vgl. Menzel, S. 4.

einmal in einer Einzelfrage unseres Problemkomplexes bei Kant doch eine Entwicklung vorliegt, auf die hinzuweisen von Wert ist.

Wir haben zunächst Kants allgemeine Philosophie der Mathematik, die die Arithmetik mitbetrifft, zu betrachten und uns dann seinen speziellen Aussagen über Arithmetik zuzuwenden. Der Aufgabe, die Grundlagen seiner Erkenntnislehre vorauszuschicken, sind wir enthoben, weil wir diese Grundlagen gleichzeitig mit seiner Philosophie der Mathematik notwenig entwickeln müssen. Wir können also der Reihe nach, beginnend mit den allgemeinsten, fortschreitend zu den spezielleren, die Kantschen Thesen zur Philosophie der Mathematik darstellen.

Zuvor fragen wir noch, wieweit bei Kant von Beachtung der oben[44]) von uns herausgestellten drei wissenschaftstheoretischen Prinzipien die Rede sein kann, wobei wir uns abermals darüber klar sein müssen, daß Kant nicht direkt eine wissenschaftstheoretische Aufgabe vor sich sieht.

Wir können sagen, daß das erste dieser Prinzipien von ihm beachtet ist. Er nimmt die Mathematik hin, wie sie ist, und schreibt ihr nichts vor. Auch wenn er sie „vor den Richterstuhl der Vernunft" zieht, so doch nicht, weil er auch nur im geringsten an ihrem wissenschaftlichen Charakter zweifelt, sondern einzig, um die Gründe dieses ihres wissenschaftlichen Charakters zu finden. Er fragt nicht, o b, sondern w i e reine Mathematik als Wissenschaft möglich ist. „Von diesen Wissenschaften (reine Mathematik und reine Naturwissenschaften), da sie wirklich gegeben sind, läßt sich nun wohl geziemend fragen, w i e sie möglich sind; denn d a ß sie möglich sein müssen, wird durch ihre Wirklichkeit bewiesen"[45]).

Wir werden bei den Einzelproblemen sehen, daß die strenge Scheidung zwischen der Frage nach dem Gegenstand und nach der Methode der Wissenschaft wie auch die zwischen der ontologischen und der psychologischen Frage von Kant nicht immer vorgenommen ist und der ganzen Anlage seines Systems nach (wir wollen darauf

44) S. 9 f.

45) Kr. d. r. V., 2. Aufl., Werke, Bd. 3, S. 40. In der Anmerkung heißt es: „Von der reinen Naturwissenschaft könnte mancher dieses letztere noch bezweifeln." In Bezug auf die Mathematik hält Kant offenbar jeden Zweifel für ausgeschlossen. — Vgl. auch Prol. § 4: Wir können „mit Zuversicht sagen", „daß gewisse reine synthetische Erkenntnis a priori wirklich und gegeben sei, nämlich reine Mathematik und reine Naturwissenschaft; . . . Wir haben also einige wenigstens unbestrittene synthetische Erkenntnis a priori und dürfen nicht fragen, ob sie möglich sei (denn sie ist wirklich), sondern nur, wie sie möglich sei". — Auch Gent betont, daß nach Kant „die Inhalte bestimmter Wissenschaften" (Mathematik und Naturwissenschaften) „zweifellos ihre wissenschaftliche Daseinsberechtigung längst bewiesen haben", und daß diese Tatsache Kant deshalb als Beweismittel dienen könne, ohne daß sie selbst bewiesen werden müßte (S. 49; vgl. unten, S. 19, Anm. 58). Ebenso urteilt Menzel: „Diese dauernde und eindrucksvolle Wirkung der Mathematik auf Kants Denken hat ihren Grund in dem besonderen erkenntnistheoretischen Charakter, den er dieser Wissenschaft von Anfang an zuerkannt hat. Er hat seine philosophischen Spekulationen über Mathematik nicht damit begonnen, womit man sie heute zumeist beginnt, dem Zweifel an ihrer Gültigkeit; sondern ihre Apodiktizität und indiskutable Anwendbarkeit war ihm zeitlebens Axiom" (S. 3). Dagegen Windelband S. 53.

an dieser Stelle nicht näher eingehen) auch nicht immer vorgenommen sein kann.

Für Kant steht die Frage nach der mathematischen Erkenntnis (die Kr. d. r. V. ist eine Erkenntnistheorie!) im Vordergrund des Interesses. Das braucht uns nicht zu hindern und wird uns nicht hindern, unsere Fragen an Kant trotzdem gegenstandstheoretisch zu fassen: Was sagt Kant über die Gegenstände der Mathematik, speziell der Arithmetik? Welches sind nach ihm die allgemeinen und speziellen charakteristischen Bestimmtheiten dieser Gegenstände? Kants erkenntnistheoretische Frage lautet in Bezug auf die Mathematik: Wie sind synthetische Urteile a priori in der Mathematik möglich? Die Antwort darauf kann er nur geben auf Grund einer bestimmten Auffassung vom mathematischen Gegenstand. Das Erkenntnisproblem schließt notwendig das Gegenstandsproblem ein. Das Gegenstandsproblem könnte dagegen auch unabhängig vom Erkenntnisproblem behandelt werden. Dies zu erhärten, mögen kurz einige Ausführungen über das Erkenntnisphänomen und die Möglichkeiten seiner Deutung folgen.

Jedes Erkennen ist Erkennen eines Etwas. Ein Erkennen, das nicht Erkennen eines Etwas wäre, ist undenkbar. Man kann also, wo von Erkennen die Rede ist, sinnnotwendig auch von einem „Gegenstand" der Erkenntnis sprechen, ganz gleichgültig, welcher Art dieser Gegenstand ist, ob ihm Wirklichkeit oder Existenz, ob ihm reales Sein, ideales Sein oder Gelten zukommt, ob er eine Fiktion ist, ob er vom erkennenden Subjekt, vielleicht erst im Erkenntnisakt selbst, erzeugt ist oder nicht. Das Erkenntnisphänomen ist immer dies: daß dem erkennenden Subjekt ein Erkenntnisgegenstand gegenübersteht, welcher vom Subjekt erfaßt wird und seinerseits das Subjekt bestimmt. Das Erkenntnisphänomen kann auf verschiedene Weise theoretisch gedeutet werden. Die Deutung des Erkenntnisphänomens gehört in die „Metaphysik der Erkenntnis". Innerhalb des Gebietes der erkenntnismetaphysischen Theorien sind zwei Grundauffassungen zu unterscheiden, die idealistische und die realistische. Die realistische betrachtet die Erkenntnisgegenstände oder einen Teil derselben als in ihrer Wirklichkeit unabhängig vom erkennenden Subjekt, und insofern sie dies tut, entspricht sie dem Erkenntnisphänomen. Die idealistische Auffassung sieht im Gegensatz zum phänomenologischen Befund alle Erkenntnisgegenstände als vom Subjekt erzeugt bezw. vom Subjekt mitbestimmt an. Eine gegenstandstheoretische Untersuchung geht immer aus vom Gegenstand, wie er uns im Erkenntnisphänomen sich darstellt. Daher ist in ihr ein Betrachten des phänomenologisch dem Erkenntnissubjekt unabhängig gegenüberstehenden Gegenstandes möglich, gleichgültig, welchen erkenntnismetaphysischen Standpunkt der Betrachter einnimmt. Erst bei fortschreitender Untersuchung wird dieser Standpunkt eine Rolle spielen, in dem Augenblick nämlich, wo die phänomenologische Beschreibung des Gegenstandes aufhört und die überphänomenologische Deutung[46]) einsetzt. Diese kann, wie ge-

46) Wir vermeiden hier den Begriff „metaphysische Deutung", weil dieser nur in Bezug auf Erfahrungsgegenstände (physische und psychische) einen Sinn hat (vgl. oben, S. 9, Anm. 30). In dem von uns verwandten Begriff „erkenntnismetaphysisch" ist der Wortbestandteil „metaphysisch" in Analogie — aber auch nur in Analogie — zu unserem früher definierten

sagt, dazu führen, daß das erkennende Subjekt als den Gegenstand in seiner Wirklichkeit (mit)konstituierend angesehen wird (Erkenntnistheoretischer Idealismus). Weil aber eine gegenstandstheoretische Untersuchung vom Phänomen ausgeht, und das Phänomen unleugbar so ist, wie wir es oben beschrieben, deshalb hat es immer einen Sinn, an einen Philosophen die Frage zu richten, welche allgemeine Charakteristik er bestimmten Gegenständen gibt, auch wenn bei diesem Denker der Gegenstand, erkenntnismetaphysisch gesehen, subjektbestimmt ist und infolgedessen für ihn das gegenstandstheoretiche Interesse hinter das erkenntnistheoretische Interesse zurücktritt bezw. in diesem aufgeht und seine Erfüllung findet. In diesem Falle erhalten dann in der über die Phänomenologie hinausgehenden Antwort auf die gegenstandstheoretische Frage die gegenstandsbestimmenden erkenntnissubjektiven Faktoren ihren entsprechenden Ausdruck.

Als allgemeinste Aussage Kants über Mathematik können wir den Satz ansehen: Alle mathematischen Urteile tragen den Charakter echter Wissenschaftlichkeit. Um den Gehalt dieser Aussage voll ausschöpfen zu können, ist eine kurze Darlegung des Kantschen Wissenschaftsbegriffs erforderlich. Ein Urteil hat nach Kant dann und nur dann wissenschaftlichen Charakter, wenn ihm erstens unbedingte Notwendigkeit und zweitens strenge Allgemeinheit zukommt. Der Begriff der Notwendigkeit ist völlig eindeutig. Notwendigkeit meint das Gegenteil von Zufälligkeit. Allgemeinheit meint das Gegenteil von „empirischer Beschränktheit", bezeichnet also Unabhängigkeit von einem einzelnen konkreten Ereignis. Notwendigkeit und Allgemeinheit sind nach Kant „Wechselbegriffe"; sie gehören „unzertrennlich zueinander". D. h.: es ist jedes allgemeine Urteil zugleich notwendig und umgekehrt jedes notwendige Urteil zugleich allgemein. Der Aufweis einer dieser Bestimmtheiten an einem Urteil reicht also hin, um das Vorhandensein auch der anderen und damit den wissenschaftlichen Charakter dieses Urteils zu erweisen. Kant empfiehlt deshalb, „sich gedachter beider Kriterien, deren jedes für sich unfehlbar ist, abgesondert zu bedienen"[47]), je nach der Zweckmäßigkeit im einzelnen Fall. Jedes wissenschaftliche Urteil ist, weil es allgemein ist, auch allgemeingültig. Denn man kann zeigen, daß die Begriffe „allgemein" und „allgemeingültig", obzwar definitionsgemäß unterschieden, ebenfalls „Wechselbegriffe" sind. (Nur in Bezug auf die Kantsche Ästhetik sind „allgemein" und „allgemeingültig" zu scheiden, nicht aber in Bezug auf die Kantsche Erkenntnistheorie und Ethik.) Allgemeingültig bedeutet: „für uns jederzeit und ebenso für jedermann gültig"[48]). Der Begriff bringt also die Beziehung des Urteils zum erkennenden Individuum zum Ausdruck, und zwar sagt er die Unabhängigkeit

Begriff „metaphysisch" verwandt. „Erkenntnismetaphysisch" hat die Bedeutung von „transzendental" in den Begriffen „transzendentaler Idealismus", „transzendentaler Realismus", nicht den von „metaphysisch" in „metaphysischer Idealismus" und „metaphysischer Realismus", welch leztere Begriffe sich nur auf das Außenwelt- und Seeleproblem beziehen, während erstere sich auf das Erkenntnisproblem beziehen.

47) Kr. d. r. V., 2. Aufl., Werke, Bd. 3, S. 29.

48) Prol., Werke, Bd. 4, S. 298.

der Wahrheit des Urteils vom Jetzt und Hier des Erkenntnisaktes aus. Kants „ursprüngliches Thema", die letzte Wurzel seines Wissenschaftsbegriffs, ist in der Forderung des „Allgemein-Notwendigen" zu sehen, das für Kant der „Grundquader im Aufbau unseres Wissens" ist[49]). Apriorität ist erst eine Folgerung aus dem „Allgemein-Notwendigen".

Für Kant steht von vornherein fest, daß Notwendigkeit nur jenseits der Erfahrung angetroffen werden kann. Er kennt zwar auch notwendige Erfahrungsurteile, z. B. die Urteile der Naturwissenschaft, die sich ja auf Erfahrungsgegenstände beziehen. Aber der Grund für die Notwendigkeit liegt bei diesen nicht in dem empirischen Faktor, der im Urteilsgegenstand enthalten ist, sondern in einem Außer-Empirischen, dessen besondere Art wir hier noch dahingestellt sein lassen können. Das Nicht-Empirische, das von aller Erfahrung Unabhängige, nennt Kant das Apriorische. Mit der Forderung der Notwendigkeit für das wissenschaftliche Urteil muß daher bei Kant notwendig die Forderung der Apriorität verknüpft sein. Wir werden nachher sehen, welcher besondere Charakter, der sich aus der Definition noch keineswegs ergibt, dem Kantschen Apriori zukommt. Hier sei zunächst festgestellt, daß gegenüber allem anderen, das den Namen der Wissenschaft trägt, die reine Logik, die reine Mathematik und die reine Naturwissenschaft für Kant ein Gemeinsames besitzen, daß sie nämlich die bisher genannten allgemeinsten Merkmale seines Wissenschaftsbegriffs mit unbestreitbarer Deutlichkeit aufweisen. Wir stoßen somit schon gleich am Ausgangspunkt auf eine Beziehung zwischen Mathematik und Logik einerseits und zwischen Mathematik und Naturwissenschaft andererseits, welche Beziehungen, wie in II herausgestellt wurde, Grundfragen der Philosophie der Mathematik in sich beschließen.

Ein Unterschied zwischen der reinen Mathematik und der reinen Logik[50]) wird sofort sichtbar, wenn wir die zweite These Kants über Mathematik aussprechen, welche lautet: „Mathematische Urteile sind insgesammt synthetisch"[51]). Im Gegensatz zu den mathematischen sind die Urteile der reinen Logik analytisch. „Analytische" und „synthetische" Urteile! Analytisch nennt Kant alle Urteile, deren Prädikat keine anderen Merkmale enthält als das Subjekt; synthetisch nennt er alle Urteile, in denen von einem Gegenstand eine neue, in seinem Begriff noch nicht als Merkmal enthaltene Bestimmtheit ausgesagt wird. Analytische Urteile kann man deshalb auch identische oder Erläuterungs-Urteile, synthetische auch nicht-identische oder Erweiterungs-Urteile nennen. Die reine oder formale Logik, die nur aus analytischen Urteilen, aus Umformungen von Begriffen besteht, die „von allem Inhalt der Erkenntnis, d. i. von aller Beziehung derselben auf das Subjekt" „abstrahirt" und „nur die logische Form im Verhältnis der Erkenntnisse auf einander,

49) A. Brunswig, S. 2, vgl. auch Adickes, S. 68.

50) Kants Begriff der reinen Logik und die dieser von ihm zugewiesene Stellung im System der Wissenschaften ergibt sich klar aus dem Satz: „Als eine Wissenschaft, die auf alles Denken überhaupt geht, unangesehen der Objekte als der Materie des Denkens, ist die Logik als Grundlage zu allen anderen Wissenschaften und als die Propädeutik alles Verstandesgebrauchs anzusehen" (Logik, S. 4).

51) Kr. d. r. V., II. Aufl., Werke, Bd. 3, S. 36.

d. i. die Form des Denkens überhaupt" betrachtet[52]), leistet für die Erkenntnis nichts Neues, ist allerdings auch keineswegs für sie entbehrlich. Neue Erkenntnisse vermögen nur Wissenschaften, deren Urteile synthetisch sind, zu vermitteln. Sie sind im Gegensatz zur formalen Logik objektbezogen. Indem Kant den synthetischen Charakter der mathematischen Urteile behauptet, nimmt er eine Scheidung vor zwischen reiner Mathematik und reiner Logik. Wir können somit hier schon schließen, daß für Kant in der mathematischen Gegenständlichkeit ein alogischer Faktor enthalten sein muß.

Den Versuch aufzuweisen, daß die mathematischen Urteile insgesamt synthetisch seien, nimmt Kant an Beispielen aus der Geometrie und aus der Arithmetik gesondert vor. Als Beispiel aus der Arithmetik wählt er bekanntlich das Urteil: „7 + 5 = 12". Er führt dazu aus: „Man sollte anfänglich zwar denken: daß der Satz 7 + 5 = 12 ein bloß analytischer Satz sei, der aus dem Begriffe einer Summe von Sieben und Fünf nach dem Satze des Widerspruchs erfolge. Allein wenn man es näher betrachtet, so findet man, daß der Begriff der Summe von 7 und 5 nichts weiter enthalte, als die Vereinigung beider Zahlen in eine einzige, wodurch ganz und gar nicht gedacht wird, welches diese einzige Zahl sei, die beide zusammenfaßt. Der Begriff von Zwölf ist keinesweges dadurch schon gedacht, daß ich mir bloß jene Vereinigung von Sieben und Fünf denke, und ich mag meinen Begriff von einer solchen möglichen Summe noch so lange zergliedern, so werde ich doch darin die Zwölf nicht antreffen" [53]).

Während also Kant die Apriorität der mathematischen Urteile einfach konstatiert, genauer: während er ihre Notwendigkeit, d. h. ihre Wissenschaftlichkeit einfach konstatiert, als unbezweifelbares Faktum hinnimmt[54]), und aus dieser auf Grund einer weiteren (unbewiesenen)[55]) Behauptung, nämlich der, daß nur außerhalb der Erfahrung Notwendigkeit vorhanden sein kann, die Apriorität folgert, führt er für den synthetischen Charakter der mathematischen Urteile den Nachweis an Beispielen. Synthetische Urteile, die zugleich apriorisch sind! Wie sind solche Urteile möglich? Das ist Kants Problem. Das Faktum der Apriorität steht für ihn bei mathematischen und naturwissenschaftlichen Urteilen außer Frage. Nur auf das Wie der Apriorität ist seine Frage gerichtet. Bei analytischen Urteilen besteht hier kein Problem. Bei diesem liegt der Grund des Apriorischen im Wesen des Analytischen. Alle analytischen Urteile sind wesensnotwendig apriorisch. Wie aber ist die Apriorität synthetischer Urteile möglich?

Es kommt also nun darauf an, das Wesen des Kantschen Apriori zu erörtern. Darüber ist vor allem zu sagen, daß Apriorität bei Kant immer das Merkmal der Subjektivität trägt. Weil nämlich Apriorität — definitionsgemäß — Unabhängigkeit von der Erfahrung bedeutet, weil also infolgedessen der Grund des Apriorischen nicht in der „Außenwelt", nicht im Bereich der Empirie liegen kann, muß er notwendig im Subjekt liegen; denn etwas Außer-Subjektives,

52) Kant, a.a.O., S. 77. Vgl. Nachlaß, Bd. III, S. 256 (Rf. 2162).
53) A.a.O., S. 37.
54) Vgl. oben S. 14.
55) Vgl. unten S. 44 f.

das gleichzeitig nicht-empirisch, nicht der Außenwelt zugehörig wäre, gibt es für Kant nicht. Külpe urteilt über das Problem „Apriorität und Subjektivität bei Kant" folgendermaßen: „Es hat auch nicht an Versuchen gefehlt, aus der transzendentalen Ästhetik die Beziehung auf das Subjekt, auf das Erkenntnisvermögen, völlig hinwegzuinterpretieren... Bei den zahlreichen, gar nicht mißzuverstehenden Äußerungen Kants, die die Apriorität als Subjektivität bestimmen, bringt man durch diese Ausscheidung zweifellos authentischer Gedanken die Kantische Lehre um eine ihrer folgenschwersten Eigentümlichkeiten" [56]). Wegen dieser Subjektbedingtheit müssen alle mathematischen Urteile, weil sie wissenschaftliche, also notwendige, allgemeine, allgemeingültige und schließlich apriorische Urteile sind, sich auf Gegenstände beziehen, die irgendwie vom erkennenden Subjekt mitbestimmt sind.

Welcher Art nach Kant die Subjektbestimmtheit der mathematischen Gegenstände ist, ist unsere nächste Frage. Wir berühren damit das Kantsche Gegenstandsproblem überhaupt, für das die Begriffe „apriori" und „aposteriori" von ausschlaggebender Bedeutung sind. Das Aposteriorische meint das Gegenteil des Apriorischen, bezeichnet also alles Stoffliche, Materiale der Erfahrung, das dem Subjekt „gegeben" ist, das „Gemüt affiziert". Es gibt nun nach Kant ein doppeltes Apriori, eines, das dem Bereich der „Sinnlichkeit", und eines, das dem Bereich des „Verstandes" angehört. „Vermittelst der Sinnlichkeit also werden uns Gegenstände gegeben, und sie allein liefert uns Anschauungen; durch den Verstand aber werden sie gedacht, und von ihm entspringen Begriffe" [57]). Das Aprioriische der sinnlichen Sphäre sind die Anschauungsformen Raum und Zeit, das der Verstandessphäre die Kategorien. Anschauungsformen und Kategorien liegen „im Gemüte bereit" bezw. sind Stammformen des Verstandes, sie sind dasjenige, das das Subjekt zum Empfindungsstoff, zum Anschauungsmaterial noch hinzutun muß, damit wissenschaftliche Erkenntnis überhaupt zustande kommen kann. Anschauungen ergeben sich durch Verbindung von Anschauungsstoff mit den Anschauungsformen Raum und Zeit, die nichts anderes sind als dasjenige, ohne das kein einziger Gegenstand vorgestellt werden kann, das allein übrig bleibt, wenn man von einem Gegenstand alles hinwegdenkt, das nicht zu seinem bloßen Gegenstandsein notwendig ist [58]). Weil die Formen der Anschauungen Raum und Zeit notwendige Bestimmtheiten jeden Ge-

56) 5. Aufl., S. 47.

57) Kant, a.a.O., S. 49.

58) Dies ist e i n Weg, den Kant einschlägt, um zu einer „Erklärungsart" von Raum und Zeit zu gelangen. „Wir sehen ihn zwei Wege einschlagen, um zu ihr zu gelangen: einmal durch ‚Wesensschau', wie man sich heute auszudrücken pflegt; auf diese Weise gelangt er zu einer ‚Phänomenologie' von Raum und Zeit im Sinne einer Beschreibung beider als Erlebnisgegebenheiten; sodann in der Weise, daß er einen B e w e i s für die Richtigkeit des Geschauten sich dadurch zu verschaffen sucht, daß er zeigt, wie dieses Geschaute geeignet ist, nach bestimmter begrifflicher Fixierung und erkenntniskritischer Plazierung die Inhalte bestimmter Wissenschaften philosophisch zu fundieren. Da diese Inhalte nun zweifellos ihre wissenschaftliche Daseinsberechtigung längst erwiesen haben, so dienen sie Kanten dann logisch einwandfrei als Beweis für das auf dem ersten Wege Gefundene und Gefolgerte" (Gent, S. 49, vgl. oben, Anm. 45).

genstandes sind, müssen sie nach dem Früheren für Kant apriorische und also Gebilde der Subjektivität sein. Erkenntnisgegenstände, nicht nur Anschauungsgegenstände, haben wir erst dann vor uns, wenn die Anschauungen in Begriffe gefaßt sind. Anschauungen ohne Begriffe sind blind. Aber umgekehrt — das ist genau so wichtig für die Kantsche Erkenntnislehre — sind Begriffe ohne Anschauungen leer. Das heißt: Wert für die wissenschaftliche Erkenntnis haben nur solche Gegenstände, die sich irgendwie auf sinnliches Material beziehen. So kann man mit B. Bauch von einem dritten Apriori, dem „Apriori des Aposteriori" bei Kant sprechen [59]), das zwar ein Apriori im uneigentlichen Sinne genannt werden muß, da bei ihm nicht von reiner Subjektbedingtheit die Rede sein kann. Der Ausdruck will nur besagen, daß für Kant gleichsam apriori feststeht, daß wissenschaftliche Erkenntnis nur von solchen Gegenständen möglich ist, in denen entweder ein aposteriorischer Faktor direkt enthalten ist oder die doch zum mindesten vom Aposteriorischen her mitbestimmt sind [60]).

In der mathematischen wie in der naturwissenschaftlichen Gegenständlichkeit muß, weil die eine wie die andere streng wissenschaftliche Urteile ermöglicht, jede der drei Arten des Apriori irgendeine gegenstandsbestimmende Funktion haben.

Den Unterschied zwischen mathematischer und naturwissenschaftlicher Gegenständlichkeit können wir zunächst negativ und sehr allgemein so charakterisieren: Die mathematischen Gegenstände besitzen w e n i g e r typische Bestimmtheiten als die naturwissenschaftlichen. Alle typischen Bestimmtheiten der mathematischen Gegenstände sind bei den naturwissenschaftlichen a u c h zu konstatieren. Und zwar — so können wir positiv sagen — sind die gemeinsamen Bestimmtheiten mathematischer und naturwissenschaftlicher Gegenstände die Anschauungsformen R a u m und Z e i t. Kant kennt nur e i n e n Raum und nur e i n e Zeit. Eine Unterscheidung etwa zwischen mathematischem und physikalischem Raum, wie sie in der heutigen Philosophie der Mathematik und der Naturwissenschaft nicht selten vorgenommen wird, kommt bei ihm nicht in Betracht. Raum und Zeit sind bei ihm in gleicher Weise Bedingungen mathematischer wie physikalischer (naturwissenschaftlicher) Gegenständlichkeit. Der Unterschied zwischen Mathematik und Naturwissenschaft besteht nun für Kant darin, daß die Naturwissenschaft sowohl zur Sphäre des Anschauungsstoffes, des Aposteriorischen, wie auch zur Verstandessphäre engere Beziehungen hat als die Mathematik. Denn einerseits ist in jedem naturwissenschaftlichen Gegenstand Anschauungsstoff als Wesensbestandteil enthalten, und andererseits spielen im naturwissenschaftlichen Bereich alle Kategorien des Verstandes eine wichtige Rolle. Weder das eine noch das andere läßt sich in Bezug auf die Mathematik sagen. Aber es darf

---

59) S. 157.

60) Geyser spricht in diesem Zusammenhang von „Kants empiristischem Dogma" (Lehrb. d. allg. Psychologie, S. 96). — Mörchen, S. 357: „Man darf in Kants Ablehnung der intellektuellen Anschauung über dem Negativen — der Kritik an der traditionellen Metaphysik — nicht übersehen, was damit positiv zur Charakterisierung des „Subjekts" gesagt ist: daß nämlich zu seinem Wesen gehört, daß ihm Seiendes gegeben ist." — Vgl. auch Herrigel, Seite 8.

doch nicht außer acht gelassen werden, daß auch für die Mathematik die beiden Sphären des Aposteriorischen und der Kategorien durchaus nicht unwesentlich sind. Denn auch für den Bereich des Mathematischen gilt: Anschauungen ohne Begriffe sind blind, Begriffe ohne Anschauungen sind leer, und: jede Anschauung ist ein Kompositum aus Anschauungsform und Anschauungsstoff.

Die Beziehung des Mathematischen zur aposteriorischen Sphäre ist darin zu erblicken, daß jeder mathematische Gegenstand auf Sinnliches muß angewandt werden können, damit er Erkenntniswert besitzt. Unmißverständlich bringt Kant das, allgemeine erkenntnistheoretische Gründe ins Feld führend, zum Ausdruck: „Sich einen Gegenstand denken und einen Gegenstand erkennen, ist also nicht einerlei. Zum Erkenntnisse gehören nämlich zwei Stücke: erstlich der Begriff, dadurch überhaupt ein Gegenstand gedacht wird (die Kategorie), und zweitens die Anschauung, dadurch er gegeben wird; denn könnte dem Begriffe eine korrespondirende Anschauung gar nicht gegeben werden, so wäre er ein Gedanke der Form nach, aber ohne allen Gegenstand und durch ihn gar keine Erkenntnis von irgend einem Dinge möglich, weil es, so viel ich wüßte, nichts gäbe, noch geben könnte, worauf mein Gedanke angewandt werden könne. Nun ist alle uns mögliche Anschauung sinnlich (Ästhetik), also kann das Denken eines Gegenstandes überhaupt durch einen reinen Verstandesbegriff bei uns nur Erkenntniß werden, so fern dieser auf Gegenstände der Sinne bezogen wird. Sinnliche Anschauung ist entweder reine Anschauung (Raum und Zeit) oder empirische Anschauung desjenigen, was im Raum und der Zeit unmittelbar als wirklich, durch Empfindung, vorgestellt wird. Durch Bestimmung der ersteren können wir Erkenntnisse a priori von Gegenständen (in der Mathematik) bekommen, aber nur ihrer Form nach als Erscheinungen; ob es Dinge geben könne, die in dieser Form angeschaut werden müssen, bleibt doch dabei noch unausgemacht. Folglich sind alle mathematischen Begriffe für sich nicht Erkenntnisse, außer so fern man voraussetzt, daß es Dinge giebt, die sich nur der Form jener reinen sinnlichen Anschauung gemäß uns darstellen lassen. Dinge im Raum und der Zeit werden aber nur gegeben, so fern sie Wahrnehmungen (mit Empfindung begleitete Vorstellungen) sind, mithin durch empirische Vorstellung“ [61]).

Beziehungen der mathematischen Gegenständlichkeit zur Verstandessphäre bestehen in zweifacher Hinsicht: Erstens sind Raum und Zeit nach Kant, wie wir schon betonten, nicht selbst mathematische Gegenstände, sondern nur notwendige Bedingungen für ihr Zustandekommen. Wir können auch sagen, das „Material“, aus dem sie erst geschaffen werden müssen. Die Erzeugung der mathematischen Gebilde aber wird durch Verstandestätigkeit geleistet. „Der Raum ist etwas so Gleichförmiges und in Ansehung aller besonderen Eigenschaften so Unbestimmtes, daß man in ihm gewiß keinen Schatz von Naturgesetzen suchen wird. Dagegen ist das, was den Raum zur Cirkelgestalt, der Figur des Kegels und der Kugel bestimmt, der Verstand, so fern er den Grund der Einheit der Construction derselben enthält. Die bloße allgemeine Form der Anschauung, die Raum heißt, ist also wohl das Substratum aller auf

61) A.a.O., S. 116 f.

besondere Objecte beziehbaren Anschauungen, und in jenem liegt freilich die Bedingung der Möglichkeit und Mannigfaltigkeit der letztern; aber die Einheit der Objecte wird doch lediglich durch den Verstand bestimmt und zwar nach Bedingungen, die in seiner eigenen Natur liegen" [62]).

Zweitens sind Raum und Zeit selbst, obwohl Formen der Anschauung, nach Kant vom Verstande mitbedingt und mitbestimmt. Wir bringen zwei Stellen aus der Kr. d. r. V., die das mit hinreichender Deutlichkeit zeigen: Ohne die „Synthesis der Apprehension", d. i. „das Durchlaufen der Mannigfaltigkeit und dann die Zusammennehmung desselben" „würden wir weder die Vorstellungen des Raumes, noch der Zeit a priori haben können: da diese nur durch die Synthesis des Mannigfaltigen, welches die Sinnlichkeit in ihrer ursprünglichen Receptivität darbietet, erzeugt werden können" [63]). „Der Raum, als Gegenstand vorgestellt (wie man es wirklich in der Geometrie bedarf), enthält mehr als bloße Form der Anschauung, nämlich Zusammenfassung des mannigfaltigen nach der Form der Sinnlichkeit Gegebenen in eine anschauliche Vorstellung, so daß die Form der Anschauung bloß Mannigfaltiges, die formale Anschauung aber Einheit der Vorstellung giebt. Diese Einheit hatte ich in der Ästhetik bloß zur Sinnlichkeit gezählt, um nur zu bemerken, daß sie vor allem Begriffe vorhergehe, ob sie zwar eine Synthesis, die nicht den Sinnen angehört, durch welche aber alle Begriffe von Raum und Zeit zuerst möglich werden, voraussetzt. Denn da durch sie (indem der Verstand die Sinnlichkeit bestimmt) der Raum oder die Zeit als Anschauungen zuerst gegeben werden, so gehört die Einheit dieser Anschauung a priori zum Raume und der Zeit und nicht zum Begriffe des Verstandes" [64]). Kann man aus diesen und ähnlichen Äußerungen Kants etwa schließen, daß für ihn Raum und Zeit und die durch sie bedingten mathematischen Gegenstände reine Verstandeserzeugnisse seien, daß die Mathematik reine Logik sei? Man kann es offenbar nicht. Mehr als eine begrenzte Verstandesbestimmtheit der Anschauungsformen und der mathematischen Gegenstände läßt sich nicht behaupten. Das geht deutlich aus dem Schlußsatz des letzten Zitats hervor, in welchem eine Trennung von Anschauungsformen und Verstandesbegriffen unverkennbar ausgedrückt liegt. Und erst in jenem „Mannigfaltigem, welches die Sinnlichkeit(!) in ihrer ursprünglichen Receptivität darbietet", muß ganz ohne Zweifel ein alogisches Moment gesehen werden. Auch Cassirer, der beispielsweise — wie auch die übrigen Vertreter der Marburger Richtung des Neukantianismus — „die rein logische Natur der mathematischen Urteile" im Sinne Kants glaubt betonen zu müssen, indem er sich darauf stützt, daß bei Kant der Begriff der „rein intellektuellen Synthesis" eine wichtige Rolle spielt, muß doch zugeben, daß die Formen der letzteren sich, „um empirische Erkenntnisse zu ermöglichen, auf die Anschauung von Raum und Zeit beziehen müssen" [65]). Es liegt vielmehr bei Kant gerade eine auffallend starke Gebundenheit seines gesamten und speziell auch

62) Prol., Werke, Bd. 4, S. 321 f.
63) Kr. d. r. V., 1. Aufl., Werke, Bd. 4, S. 77.
64) 2. Aufl., Werke, Bd. 3, S. 125.
65) Kant und die moderne Mathematik, S. 35 f.

seines mathematischen Gegenstandsbegriffs an das Empirische vor, was eine für sein System außerordentlich ins Gewicht fallende Enge seines Gegenstandsbegriffs bedeutet.

Was die kategoriale Bestimmtheit der mathematischen Gegenstände, und insbesondere ihrer „Substanz", der Anschauungsformen Raum und Zeit, angeht, so unterscheidet sie sich wesentlich, wie oben angedeutet, von der kategorialen Bestimmtheit der naturwissenschaftlichen Gegenstände. Mit Recht betont Ernst Marcus: „Die Kategorialfunktionen, durch deren Konstruktion Zeit und Raum entstehen, müssen scharf unterschieden werden von den eigentlichen Kategorien, die die Materie in Zeit und Raum treffen, also die eigentlichen Objekte der Erfahrung konstituieren ... Auch die Kategorialfunktion enthält dasselbe logische Moment wie die Kategorie, aber sie ist z. B. auch anwendbar, ... um mathematische Konstruktionen hervorzubringen. Sie ist ... eine synthetische Funktion. Die eigentlichen Kategorien dagegen sind Begriffe im eigentlichen Sinn ... Die Synthesis in Zeit und Raum muß ... stattgefunden haben, bevor die eigentlichen Kategorien anwendbar sind. Diese beziehen sich nämlich auf die Materie, sofern sie bereits als zeitlich und räumlich geformt vorausgesetzt ist" [66]). Marcus weist darauf hin, daß er mit der Unterscheidung zwischen den „Kategorialfunktionen" und den „eigentlichen Kategorien" oder „Materialkategorien" „eine sehr störende Lücke der Kritik beseitigt habe, da Kant ... gesondert nur die Materialkategorien und den zugehörigen sekundären Schematismus" behandelt [67]). In der Tat sind bei Kant „Kategorialfunktionen" und „primärer Schematismus" — wir werden auf den Begriff des Schematismus und auf die Marcussche Unterscheidung zwischen primärem und sekundärem Schematismus später kurz zurückkommen — noch nicht ausdrücklich aufgedeckt, obwohl in der Kritik latent enthalten und, wie z. B. schon gezeigt, z. T. noch zu zeigen ist, von besonderer Wichtigkeit für sein System, insbesondere auch, soweit die mathematische Gegenständlichkeit in Betracht kommt.

Abschließend und zusammenfassend können wir folgendes über die Eigenart der mathematischen Gegenständlichkeit bei Kant sagen: Sie ist in zweierlei Hinsicht durch alogische Momente bestimmt. Erstens insofern die Alogisches enthaltenden Anschauungsformen Raum und Zeit ihr Substrat bilden und zweitens insofern sie auf die selbstverständlich alogischen Gegenstände des sinnlich-empirischen Bereichs wesensnotwendig bezogen ist. Zwei apriorische Faktoren sind an ihrer Erzeugung beteiligt: wieder die Anschauungsformen Raum und Zeit und der schöpferisch tätige Verstand. Das Subjekt also — denn alles Apriorische gehört dem Subjekt an — ist der Schöpfer der mathematischen Gegenstände. Das bringt nicht etwa Zufälliges oder Willkürliches in sie hinein; denn Subjektivität bedeutet bei Kant nicht Zufall, nicht Willkür, bedeutet ganz im Gegenteil — „Objektivität", nämlich strenge Allgemeinheit und das heißt zugleich: objektive Gültigkeit [68]). In der subjektiven Realität liegt für

66) Tiefen der Erkenntnis, S. 152.

67) A.a.O. S. 133.

68) Vgl. Adickes, S .68: „Idealität" ist etwas anderes als die Subjektivität der sekundären Sinnesqualitäten, die „bloß zur subjektiven Beschaffenheit

Kant der Zwang zur objektiven Gültigkeit. Das ist das Eigentümliche seiner Lehre (seiner Erkenntnis- wie übrigens auch seiner Sittenlehre). Aber trotzdem gehört es ebenso zu seinem System, daß das Außer-Subjektive, das Empirische, einen nicht geringen Zwang auf das gegenstandschaffende Subjekt ausübt. Es zieht der Schöpfertätigkeit des Subjekts ganz bestimmte Grenzen. Kein Gegenstand hat objektive Gültigkeit, hat Erkenntniswert, hat Wissenschaftscharakter, und sei er auch von fest fundiertem mathematischen Boden aus mit den Mitteln der reinen Logik konstruiert, der nicht zum Bereich des Empirischen Beziehungen aufwiese.

Wir dürfen die bisherigen allgemeinen Ausführungen über Kants Philosophie der Mathematik nicht aus den Augen verlieren, wenn wir uns nun der Untersuchung seiner Philosophie der Arithmetik zuwenden, wobei es sich im wesentlichen um die Frage, was nach Kant die Zahl sei, handeln wird.

Da für Kant die Anschauungsformen Raum und Zeit das „Material" sind, aus dem vom Verstand alle mathematischen Gegenstände gebildet werden, und da ferner im Besonderen der Raum das „Material" für die geometrischen Gegenstände ist, so erhebt sich zwangsläufig jetzt die Frage, ob im Sinne Kants als das „Material" der arithmetischen Gegenstände die Zeit anzusehen ist. Wir kommen damit zum Problem „Zahl und Zeit bei Kant". Die soeben aufgeworfene Frage scheint zunächst ebenso zwangsläufig, wie sie gestellt werden muß, mit Ja beantwortet werden zu müssen. Denn die gesamte Mathematik spaltet sich hinsichtlich ihrer letzten nicht weiter reduzierbaren gegenständlichen Fundamente (einfache geometrische Gebilde und natürliche Zahlen) einzig in Geometrie und Arithmetik[69]), ähnlich wie Raum und Zeit, die apriorischen Grundlagen der Mathematik, die einzigen selbständigen Formen der Anschauung sind. Was läge näher als, da eine Zuordnung zwischen Raum und Geometrie besteht, eine ebensolche zwischen Zeit und Arithmetik anzunehmen, zumal noch ein weiteres unmittelbar erkenntliches äußeres Merkmal der Parallelität hinzukommt, nämlich dies, daß die Zeit in ähnlicher Weise allgemeiner ist als der Raum, wie die Arithmetik allgemeiner ist als die Geometrie, zwar nicht in dem Sinne, daß die Raumanschauung ein spezieller Fall der Zeitanschauung wäre, und die Geometrie ein spezieller Fall der Arithmetik, vielmehr in dem Sinne, daß alles, was im Raume ist, zugleich auch in der Zeit steht, nicht aber umgekehrt, ähnlich wie auf alles Geometrische die Gesetze der Arithmetik angewandt werden können und müssen, wohingegen die Arithmetik gänzlich unabhängig von der Geometrie gedacht werden kann. Daß die Zeit in der dargelegten Weise allgemeiner sei als der Raum, betont auch Kant ausdrücklich: „Die Zeit ist die formale Bedingung a priori aller Erscheinungen überhaupt. Der Raum als die reine Form aller äußeren Anschauung ist als Bedingung a priori bloß auf äußere Erscheinungen eingeschränkt. Dagegen weil alle Vorstellungen, sie

der Sinnesart gehören" (Kant). Der Raum ist trotz seiner Subjektivität zugleich apriori und objektiv.

69) Vgl. A. Müller, Gegenstand der Mathematik, S. 65. — Danach gilt das Gesagte auch vom Standpunkt der heutigen Mathematik, trotz deren größerer Differenziertheit. — Vgl. auch F. Kluge, S. 32, Abb. 3.

mögen nun äußere Dinge zum Gegenstande haben oder nicht, doch an sich selbst, als Bestimmungen des Gemüths, zum innern Zustande gehören; dieser innere Zustand aber unter der formalen Bedingung der inneren Anschauung, mithin der Zeit gehört: so ist die Zeit eine Bedingung a priori von aller Erscheinung überhaupt ... alle äußere Erscheinungen sind im Raume .... alle Erscheinungen überhaupt... sind in der Zeit" [70]). Auch die größere Allgemeinheit der Arithmetik gegenüber der Geometrie hat Kant gesehen, was z. B. die folgende Stelle zeigt: „Die Mathematik construirt nicht bloß Größen (quanta), wie in der Geometrie, sondern auch die bloße Größe (quantitatem), wie in der Buchstabenrechnung" [71]).

In der Tat hat Kant verschiedentlich, und zwar an entscheidenden Stellen seiner Hauptschriften, die durch die äußere Proportionalität Geometrie: Arithmetik = Raum: Zeit nahegelegte Konsequenz gezogen und die Arithmetik auf die Zeit gegründet. Sehr prägnant kommt das zum Ausdruck in den „Prolegomena", wo es heißt: „Geometrie legt die reine Anschauung des Raums zum Grunde. Arithmetik bringt selbst ihre Zahlbegriffe durch successive Hinzusetzung der Einheiten in der Zeit zu Stande" [72]). Demnach ist die Zahl Produkt der „successiven Hinzusetzung der Einheiten in der Zeit". Drei Elemente enthält diese Aussage: 1. Die Zahl ist Produkt eines subjektiven Tuns, also ein Erzeugnis des Subjekts. 2. Die Bestandteile der Zahl sind die „Einheiten". 3. Die Erzeugung der Zahl aus den Einheiten geschieht auf Grund der Zeitanschauung.

Was die Zahl i s t, sagt Kant direkt nur an einer einzigen Stelle, und zwar in dem Kapitel der Kr. d. r. V. über den „Schematismus der reinen Verstandesbegriffe". Es heißt dort: „Das reine Schema der Größe aber (quantitatis) als eines Begriffs des Verstandes ist die Zahl, welche eine Vorstellung ist, die die successive Addition von Einem zu Einem (gleichartigen) zusammenbefaßt. Also ist die Zahl nichts anderes als die Einheit der Synthesis des Mannigfaltigen einer gleichartigen Anschauung überhaupt, dadurch ich die Zeit selbst in der Apprehension der Anschauung erzeuge" [73]). Bezüglich des Verhältnisses von Zahl und Zeit dieselbe Auffassung wie vorher! Aber hier ist sie noch verdeutlicht. Die Zahl ist die zusammenfassende Vorstellung des Zählprozesses, der in der Zeit verläuft; die Zeit selbst aber wird in diesem Prozeß erzeugt. Denkbar engste Verbindung von Zahl und Zeit liegt hier vor, die noch offenbarer wird durch den neuen Begriff, der uns soeben entgegengetreten ist, den Begriff des Schemas. D i e Z a h l i s t, wie die Zeitreihe e i n S c h e m a. Was ist bei Kant ein Schema? Es ist ein Etwas — sagen wir zunächst unbestimmt —, das „zwischen" Begriff und Anschauung liegt und irgendwie an beiden Teil hat; es gehört nicht dem Verstand, nicht der Sinnlichkeit, sondern einem „mittleren" Dritten an, der „Einbildungskraft". „Das Schema ist an sich selbst jederzeit nur ein Product der Einbildungskraft" [74]). Kant hält ein Drittes neben Kategorien und Anschauungsformen in seinem System

70) Kr. d. r. V., 2. Aufl. Werke, Bd. 3, S. 60.
71) A.a.O., S. 471.
72) Werke, Bd. 4, S. 283
73) Werke, Bd. 3, S. 137.
74) Werke, Bd. 3, S. 135.

für erforderlich, damit das Problem „Wie ist Anwendung der Kategorien auf Erscheinungen, die doch ganz scharf getrennten Sphären angehören, möglich?" sinnvoll gelöst werden kann. Schema nennt er eben dasjenige, das die geforderte Anwendung ermöglicht. Das kann aber nichts anderes sein, als die „Zeitbestimmung". Denn diese ist „mit der Kategorie (die die Einheit derselben ausmacht) so fern gleichartig, als sie allgemein ist und auf einer Regel a priori beruht. Sie ist aber andererseits mit der Erscheinung so fern gleichartig, als die Zeit in jeder empirischen Vorstellung des Mannigfaltigen enthalten ist. Daher wird eine Anwendung der Kategorie auf Erscheinungen möglich sein vermittelst der transscendentalen Zeitbestimmung, welche als das Schema der Verstandesbegriffe die Subsumtion der letzteren unter die erste vermittelt" [75]). So ist also die Zeit vor dem Raum dadurch ausgezeichnet, daß sie nicht nur Anschauungsform, sondern auch Schema ist und der Grund für diese Auszeichnung liegt, wie leicht zu erkennen ist, in der oben bereits charakterisierten größeren Allgemeinheit, die die Zeit gegenüber dem Raume besitzt. Alle speziellen Schemata [76]) sind irgendwie von dem allgemeinen, der Zeit, mitbestimmt, bezw. haben teil an ihr. Die Zahl ist ein solches spezielles Schema. Sie ist also ein „Mittleres" zwischen Anschauung und Begriff, zwischen Erscheinung und Kategorie, das aber an den Sphären beider irgendwie Anteil hat, und sie ist notwendig wesensverwandt mit der Zeit.

Wenn wir eine solch weitgehende Übereinstimmung zwischen den „Prolegomena" und dem Schematismuskapitel der Kr. d. r. V. hinsichtlich des Problems „Zahl und Zeit" feststellen können, so muß es umso mehr auffallen, daß in der „transzendentalen Ästhetik" der K. d. r. V. sowohl in der ersten wie in der zweiten Auflage der Parallelismus Geometrie: Arithmetik = Raum: Zeit nicht durchgeführt ist, und daß an zwei anderen Stellen über die Zahl ohne jede Bezugnahme auf die Zeit Positives gesagt wird, das allerdings in keiner Weise den Charakter einer präzisen Definition besitzt.

In der ersten Auflage der Kr. d. r. V. heißt es: „Der Raum ist eine nothwendige Vorstellung a priori, die allen äußeren Anschauungen zum Grunde liegt.... Auf diese Nothwendigkeit a priori gründet sich die apodiktische Gewißheit aller geometrischen Grundsätze und die Möglichkeit ihrer Constructionen a priori" [77]). In der 2. Auflage sagt Kant an der analogen Stelle, in der „transzendentalen Erörterung des Begriffs vom Raume": „Geometrie ist eine Wissenschaft, welche die Eigenschaften des Raumes synthetisch und doch a priori bestimmt" [78]). Es fehlen aber in beiden Auflagen entsprechende Äußerungen über Arithmetik und Zeit, obwohl der Zeitbegriff ebenso erörtert wird wie der Raumbegriff. Deshalb folgert Michaelis: „Sollte die Arithmetik in gleicher Weise die Zeitanschau-

75) Werke, Bd. 3, S. 134 f. — Unter dem Transzendentalen versteht Kant dasjenige, das Erfahrung erst ermöglicht, also die apriorischen Bedingungen aller möglichen Erfahrung. Zum Unterschied davon bedeutet transzendent das über die Erfahrung Hinausgehende. Vgl. Windelband, S. 50.

76) Werke Bd. 3, S. 137 f.

77) Werke, Bd. 4, S. 32.

78) Werke, Bd. 3, S. 54.

ung voraussetzen, so müßte bei der Parallelität der Erörterung des Raumes und der Zeit in der Kr. d. r. V. eine ähnliche Auslassung über Zahl und Arithmetik in dem Abschnitte von der Zeit Platz finden. Das ist nicht der Fall... Kant hat hier also bestimmt von einer Analogie zwischen Geometrie und Arithmetik, zwischen Raum und Zahl Abstand genommen" [79]).

An zwei Stellen bestimmt Kant, wie bereits erwähnt, die Zahl positiv, ohne auf die Zeit auch nur im geringsten Bezug zu nehmen. In der Kr. d. r. V., 1. Aufl., lesen wir: „Die reine Synthesis, allgemein vorgestellt, giebt nur den reinen Verstandesbegriff. Ich verstehe aber unter dieser Synthese diejenige, welche auf einem Grunde der synthetischen Einheit a priori beruht: so ist unser Zählen (vornehmlich ist es in größeren Zahlen merklicher) eine Synthesis nach Begriffen, weil sie nach einem gemeinschaftlichen Grunde der Einheit geschieht (z. E. der Dekadik)" [80]). Michaelis bemerkt hierzu: „Von einer Zeitanschauung im Zahlbegriff ist hier nicht die Rede; man könnte höchstens vorgreifend und nach Kant Schema und Synthesis identifizierend auch in dieser Auseinandersetzung schon ein Hineintragen der Zeitanschauung in den Zahlbegriff entdecken" [81]). In § 11 der 2. Aufl. der Kr. d. r. V. sagt Kant, daß die Zahl „zur Kategorie der Allheit gehört", nachdem er ausgeführt hat, daß die dritte Kategorie allenthalben aus der Verbindung der zweiten mit der ersten ihrer Klasse entspringt (also die Allheit aus der Verbindung der Vielheit mit der Einheit), so jedoch, daß dazu „ein besonderer Actus des Verstandes erforderlich sei" [82]). Michaelis glaubt mit Sicherheit die Stelle so deuten zu können, daß Kant hier „den Begriff der Zahl ganz aus der Sphäre der Sinnlichkeit hinaus in das Reich des Verstandes verweist", und er vermutet ferner, daß Kant die Zahl als einen „abgeleiteten Begriff" ansieht, weil er sagt, „die Zahl g e h ö r e zur Kategorie der Allheit" [83]).

Die einzige Stelle, wo Kant die Beziehung der Zahl zur Zeit ausdrücklich in Abrede stellt, ist enthalten in dem Brief an Johann Schultz vom 25. November 1788: „Die Zeit hat... keinen Einflus auf die Eigenschaften der Zahlen." Es heißt dann weiter: „ ... die Zahlenwissenschaft ist, unerachtet der Succession, welche jede Construction der Größe erfordert, eine reine intellectuelle Synthesis, die wir uns in Gedanken vorstellen. So fern aber doch Größen (quanta) darnach zu bestimmen seyn, so müssen sie uns so gegeben werden, daß wir ihre Anschauung successiv auffassen können und also diese Auffassung der Zeitbedingung unterworfen seyn, so, daß wir denn doch keinen Gegenstand, als den der möglichen s i n n l i c h e n Anschauung, unserer Größenschätzung durch Zahlen unterwerfen können und es also ein Grundsatz ohne Ausnahme bleibt, daß die Mathematik sich nur auf sensibilia erstrecke" [84]).

Sind diese äußerst verschiedenartigen Äußerungen Kants über den Zahlenbegriff miteinander in Einklang zu bringen? Darum wird

---

79) S. 7.
80) Werke, Bd. 4, S. 64 f.
81) S. 7.
82) Werke, Bd. 3, S. 96.
83) S. 8.
84) Briefwechsel Bd. 1, S. 530.

es sich kaum handeln können, da sie sich zum Teil offen widersprechen. Es wird daher darauf ankommen zu prüfen, welchen der vorgelegten Äußerungen das größere Gewicht beizulegen ist.

Wir sind zunächst zu der Feststellung genötigt, daß den beiden ersten Zeugnissen, in welchen die Zahl auf die Zeit gegründet wird, rein dem Wortlaut nach die größere Bestimmtheit und Sicherheit eignet. Kant sagt da wirklich, was die Zahl ist, bezw. wie sie erzeugt wird. In dem zweiten Zeugnis findet die Zahldefinition sogar ihren wohlbestimmten Platz innerhalb einer relativ abgeschlossenen Theorie, nämlich der Theorie des Schematismus. Jedoch hat gerade diese Theorie ihre besonderen Tücken [85]). In den beiden Zeugnissen, die Äußerungen über die Zahl ohne Bezugnahme auf die Zeitanschauung enthalten, scheint im Gegensatz zu den ersteren der Zahlbegriff nur nebenbei, nur beispielhaft erwähnt zu sein. Vielsagend ist allerdings das Fehlen einer Begründung der Arithmetik auf die Zeit an einer Stelle, wo sie aus Gründen der Systematik fast notwendig hätte erfolgen müssen, wenn sie der wahren Meinung Kants entsprochen hätte. Darf man aber aus einem bloßen Fehlen einer Äußerung so weitgehende Schlüsse ziehen, wie beispielsweise Michaelis gezogen hat? Zudem: Könnte der Grund des Fehlens nicht darin zu suchen sein, daß eben in der später folgenden Schematismuslehre die Frage aus tiefer gelegenen Zusammenhängen heraus behandelt ist? Dann wäre es auch verständlich, daß in den „Prolegomena" das Zahl-Zeitproblem an die Stelle gerückt ist, die den Abschnitten über die Zeit in der transzendentalen Ästhetik der Kr. d. r. V. entspricht; denn in den „Prolegomena" befindet sich kein Abschnitt über den Schematismus. Jedoch darf man, was die „Prolegomena" angeht, nicht unberücksichtigt lassen, daß diese, so sehr sie auch eine Einführung in die Gedankenwelt der Vernunftkritik sein sollen, oft, vielleicht gerade wegen dieses Zweckes der Einführung, Spuren bedenklicher Popularisierung aufweisen. Heinemann spricht gerade auch in Bezug auf unser Problem von „kaum zu überbietender Popularität" [86]). Am stärksten gegen die Möglichkeit der Annahme eines Zusammenhangs zwischen Zahl und Zeit bei Kant zeugt die zitierte Briefstelle. Hier wird ein ontologischer Zusammenhang in nicht mißzuverstehender Form bestritten, während der psychologische Zusammenhang, der auch an den anderen Stellen hineinspielt und in eigentümlicher Weise mit Ontologischem verwoben ist, wieder eigens hervorgehoben wird.

Versuchen wir, den Zahlbegriff in das Ganze des Kantschen Systems einzuordnen, so kommen wir zu der Auffassung, daß eine Verbindung von Zahl und Zeit auch im ontologischen Sinn bei Kant angenommen werden muß. Auch Michaelis, der diese Auffassung Kant nicht als ernsthaft zutrauen möchte, bezeichnet sie als die „eigentlich kantische", „weil sie in der Konsequenz seines Systems liegt, und weil speziell seine Definition der Mathematik die Verbindung der Zahl mit einer Anschauung erheischt" [87]). Berücksichtigen wir, daß in der Briefstelle sich eine Bemerkung befindet, die von uns früher als allgemeine Anschauung Kants über Ma-

85) Vgl. unten S. 30 ff.
86) S. 148.
87) S. 8.

thematik Herausgestelltes bestätigt, die Bemerkung nämlich, daß die „Auffassung" der Zahl der Zeitbedingung unterworfen sei, und „daß wir denn doch keinen Gegenstand als den der möglichen sinnlichen Anschauung unserer Größenschätzung durch Zahlen unterwerfen können", so müssen wir feststellen, daß es nach Kant jeder Zahl w e s e n t l i c h ist, auf „sensibilia" angewandt werden zu können. Nun erfolgt aber Anwendung der Zahl auf „sensibilia" im einfachsten Fall durch Zählen der sinnlichen Gegenstände, und dies geschieht notwendig in der Zeit. Doch betrifft diese Feststellung nicht mehr als eine Trivialität. „Daß über dem Zählen Zeit verfließt, kann keinen Beweis [88]) abgeben, denn worüber verflösse wohl nicht Zeit!" [89]). Mit dem Begriff des Zählens bringen wir das psychologische Moment in die Betrachtung hinein. Jedes Zählen ist ein psychischer Vorgang, der selbstverständlich, wie jeder psychische Vorgang, in der Zeit verläuft. Es kam aber doch Kant, wenn er schon die Zahl zur Zeit in Beziehung setzte, sicherlich nicht darauf an, nur jene Trivialität zum Ausdruck zu bringen. Dennoch spielt das psychologische Moment eine Rolle bei seiner ontologischen Bestimmung des Zahlbegriffs, spricht er doch in Bezug auf diesen von „Erzeugen", von „Zustandekommen", von „Hinzufügen" (der „Einheiten"). Die Vorstellung vom psychischen Vorgang des Zählens ist mitbestimmender Faktor der ontologischen Gegenstandscharakterisierung der Zahl bei Kant. Psychologisches wird von ihm gewissermaßen in Ontologisches übersetzt. Dieses Übersetzen beruht aber nicht in der Weise auf einer Verwechslung der ontologischen mit der psychologischen Frage, wie es in den ausgesprochen empiristisch-psychologistischen Theorien der Zahl der Fall ist. Die Möglichkeit solchen „Übersetzens" kann nur einigermaßen begreiflich werden von der Einsicht in die Eigenart des Kantschen Z e i t begriffs aus.

Wäre die Zeit bei Kant nur reine Anschauungsform, so würden wir die Kantsche Zahllehre, falls in ihr eine Verbindung des Zahlbegriffs mit dem Zeitbegriff vorläge, zu den empiristischen bezw. psychologistischen Theorien der Zahl rechnen müssen. Zwar könnte man demgegenüber darauf hinweisen, daß doch auch die Zeit in ihrer Eigenschaft als reine Form der Anschauung ganz zur Sphäre des Apriorischen gehört und daß man infolgedessen mit gleichem Rechte wie die Zahl-Zeitlehre die Lehre, daß die Geometrie sich auf den Raum gründe, als psychologistisch und empiristisch bezeichnen könne, da doch Raum und Zeit koordiniert seien, wenn sich das Wesen der Zeit in ihrem Charakter als Anschauungsform erschöpfe. Jedoch ist, ob die Geometrie-Raum-Lehre als empiristische oder nicht-empiristische Theorie der Geometrie aufzufassen ist, davon abhängig, wie der Raum „metaphysisch" gedeutet wird, ob als der Außenwelt oder dem Subjekt innewohnend. Dagegen ist die Zahl-Zeitlehre unabhängig von der „metaphysischen" Deutung der Zeit psychologistisch-empiristisch zu nennen. Denn der Theorie, welche den Zahlbegriff mit dem Zeitbegriff verbindet, liegt, wenn nicht dem Zeitbegriff Merkmale zukommen, die nicht nur jenseits des Phänomenologischen, sondern auch jenseits des Metaphysischen lie-

88) dafür, daß die Zeit ontische Grundlage der Zahl sei,

89) Beneke, System der Logik. Vgl. Cassirer, Kant und die moderne Mathematik, S. 34 Anm. 1, E. Husserl, S. 28 ff.

gen, immer der psychologistische Gedanke zugrunde, daß die Zahl in der Zeit, durch den Akt des Zählens, entstehe. Wir nennen daher diese Auffassung psychologistisch und, weil sie auf Erfahrung sich gründet, empiristisch. Trotzdem ist die Kantsche Begründung der Zahl auf die Zeit nicht empiristisch-psychologistisch zu verstehen. Denn das Wesen der Zeit ist bei Kant durch die metaphysische Deutung der Zeit als reine Anschauungsform noch nicht vollständig umschrieben. Es haftet dem Kantschen Zeitbegriff noch ein Merkmal an, das ihn mit der Sphäre des Verstandes in engste Beziehung bringt. (Diese Beziehung ist nicht nur die in den Ausführungen von S. 22 f. dargestellte, die ja in analoger Weise auch für den Raum Geltung hat.) Dieses Merkmal hebt die Zeit aus der Sphäre der Sinnlichkeit, nicht nur aus dem Aposteriorischen, sondern auch aus dem Apriorischen der Sinnlichkeit heraus, ohne daß dadurch jedoch ein zweiter selbständiger Zeitbegriff konstituiert würde. Diese Tatsache ist es, die die Kantsche Zahl-Zeitlehre in besonderem Licht erscheinen läßt.

Wir wiesen bereits (bei der Zusammenstellung der bei Kant vorliegenden Äußerungen über den Zahlbegriff) darauf hin, inwiefern der Zeitbegriff bei Kant über die Sphäre der Sinnlichkeit hinausragt. Der Zeitbegriff hat nicht nur in der „Ästhetik" seine Stelle, sondern er bildet einen Zentralbegriff in Kants Lehre vom Schematismus der reinen Verstandesbegriffe. Der Abschnitt über den Schematismus gehört zu den am meisten erörterten der gesamten Vernunftkritik. Nicht nur birgt das Schematismuskapitel in sich erhebliche Schwierigkeiten, auch seine Notwendigkeit für das Ganze des Kantschen erkenntnistheoretischen Systems wird bestritten [90]). Fraglich erscheint, ob das Schema ein selbständiges Drittes ist, das Anschauliches und Kategoriales in seinem Wesen vereinigt, und dadurch Anschauungs- und Verstandessphäre miteinander verbindet, oder ob allein in der faktisch vorhandenen und konstatierbaren Möglichkeit der Anwendung von Kategorien auf Anschauungen das Wesen des Schemas liegt, was bedeuten würde, daß die Einführung dieses Begriffs sich erübrigte. Uns scheint das erstere der wahren Meinung Kants gemäßer zu sein. Von Kant selbst liegt die Äußerung aus dem Jahre 1798 vor: „Überhaupt ist der Schematismus einer der schwierigsten Punkte ... Ich halte dieses Kapitel für eins der wichtigsten" [91]). Als nicht notwendig erachtet Zschocke den Begriff des Schemas für das Kantsche System. „Das Schema sollte nach Kant ein Drittes sein zwischen Anschauung und Verstandesbegriff, und worin besteht es tatsächlich? Es ist nichts mehr und nichts weniger als die Verbindung von Anschauung und Begriff selber, die doch eben das Problem war: die Zeit ist die Anschauungsform, die Kategorie ist der Verstandesbegriff, das Schema ist eine Vereinigung beider, sonst nichts; anstatt eines Dritten, das wir suchten, legt Kant Eins und Zwei kurzerhand zusammen. Das Problem wird dadurch höchst einfach gelöst, daß es ignoriert wird. So heterogen Anschauung und Begriffe sein mögen, wie Kant zunächst behauptete, im Schema verbindet er sie durch den Machtspruch: fügt euch zusammen. Das Dritte zur Anwendung wird Kant unter den Händen

90) z. B. von Zschocke.
91) Mörchen, S. 419.

die Anwendung selber“ [92]). Zschocke macht die Voraussetzung nicht mit, mit der die Schematismuslehre „steht und fällt“, die Voraussetzung „der Diskrepanz und damit der Vermittlungsbedürftigkeit von Verstand und Sinnlichkeit. Wenn man diese Voraussetzung nicht zugibt, dann braucht man auch den Schematismus nicht zu akzeptieren, wenigstens nicht in der von Kant ihm gegebenen Form“ [93]). Aber — so urteilt Curtius —: „Wenn man davon absieht, an der Lehre vom Schematismus Kritik zu üben, und es nur darauf anlegt, Kants Gedanken wiederzugeben, dann muß man sagen: der Schematismus hat in Kants Erkenntnislehre eine zentrale Bedeutung, denn durch ihn werden „die beiden äußersten Enden“, Verstand und Sinnlichkeit wieder zusammengefügt, nachdem sie völlig isoliert waren. Nur der Schematismus macht das menschliche Denken möglich. Unser ganzes geistiges Leben beruht auf ihm. Ohne Schematismus hätten wir nur einerseits ungeformte sinnliche Eindrücke, andererseits unerfüllte erkenntnistheoretische Formen. Der Schematismus ist fest vernietet in Kants erkenntnistheoretischem System. Dies sieht man auch daraus, daß Kants Lehre von der Zeit sich hier „als ein unentbehrliches Zwischenglied seiner gesamten psychologisch-erkenntnistheoretischen Konstruktion“ zeigt (Windelband, Geschichte der neueren Philosophie, II, 82)“ [94]). Curtius selbst unterscheidet bei Kant einen Synthesis- und einen Subsumtions-Schematismus, die er für unvereinbar miteinander hält. Den Vorzug verdient nach ihm der Synthesis-Schematismus, er bemerkt aber, „daß dem Subsumtions-Schematismus und dem Synthesis-Schematismus die Auffassung des Schemas als transzendentaler Zeitbestimmung gemeinsam ist“ [95]). Diese Urteile können uns genügen, um die Berechtigung darzutun, dem Schematismuskapitel Bedeutung beizumessen für die Aufgabe, Kants Meinung über das Wesen der Zahl und ihren Zusammenhang mit der Zeit zu finden. Zweifellos gehört der Zeitbegriff zu den Wesensbestandteilen der Schematismuslehre. Umgekehrt ist also der Zeitbegriff nicht zu denken ohne die Beziehung, die er zum transzendentalen Schema hat. Das Schema aber stellt die Verbindung zwischen Verstand und Sinnlichkeit her oder es ist diese Verbindung selbst, insofern es Produkt der „Einbildungskraft“ ist. Denn die Einbildungskraft ist einerseits ein „notwendiges Ingredienz“ des Begriffs, andererseits aber auch ein „notwendiges Ingredienz“ der Wahrnehmung [96]).

Wie sich Zahl und Zeitbegriff bei Kant verbinden, deutet Mörchen folgendermaßen an: Die Zeit gibt „verbindbares Mannigfaltiges“ vor. Indem sie dies „vorgibt, versteckt sie gleichsam sich selbst. Das reine Mannigfaltige hat die Struktur: dieses und dieses und dieses. Darin liegt die Zeit versteckt und kann daher entdeckt werden, wenn wir ausdrücklich mitsagen: jetzt dieses und jetzt dieses und jetzt dieses. Dies durch das Jetzt gegebene Dieses wird im Hinblick auf die verschiedenen Kategorien in verschiedener Weise bestimmt. Z. B. im Hinblick auf Quantität wird es bestimmt

92) S. 361 f.
93) Curtius, S. 366.
94) S. 366.
95) S. 365.
96) Mörchen, S. 438.

als Eins. „Jetzt und Jetzt und Jetzt" heißt nun: „eins und eins und eins". Der Hinblick auf Quantität bestimmt die Synthesis als Zahl, im Sinne von Zählen. Ich zähle: eins plus eins plus eins — drei. Das Jetzt, insofern es immer schon ein Dieses gibt, läßt im Zählen der Dieses als der Eins ein Quantum sehen" [97]).

Entschieden betont auch Oskar Becker, in dessen eigener Philosophie der Mathematik dem Zeitbegriff eine ausgezeichnete Bedeutung zukommt, die Begründung der Zahl auf die Zeit bei Kant, ja er nennt „die Lehre Kants von der Arithmetik als Wissenschaft vom zeitlichen Schema, der Zahl... das wichtigste Stück seiner Philosophie der Mathematik"! [98]). In der „Mathematischen Existenz" heißt es: „Es ist bekannt, daß Kant die beiden mathematischen Urdisziplinen Arithmetik und Geometrie den beiden Anschauungsformen (des Menschen!) Zeit und Raum zuordnet. Wie der reine Raum der Geometrie, so liegt die reine Zeit der Arithmetik zu Grunde. Allerdings offenbar nicht in derselben Weise, denn die Zahl ist ursprünglich diskret, die geometrische Figur kontinuierlich. Dem trägt Kant dadurch Rechnung, daß die Zahl nicht in der transzendentalen Ästhetik allein behandelt wird, sondern außerdem noch in dem Hauptstück der transzendentalen Analytik über den Schematismus der reinen Verstandesbegriffe und da erst in eigentlicher und maßgeblicher Weise" [99]).

In seiner „Geschichte der Begriffe des Raumes und der Zeit vom kritischen Kant bis zur Gegenwart" führt Gent, Kants Lehre über Zeit und Zahl darstellend, aus: „Indem wir nun die Zeit „zeugen", bestimmen wir die uns bisher allein bekannte Anschauungszeit; wir machen sie gleichsam diskontinuierlich; denn der Verstand überschaut und begreift nur Diskontinuitäten. Setzt er Einheit zur Einheit in der reinen Zeit, so entspringt ihm die Zahl; das ist der Sinn der Kantischen Lehre von der Gründung des Zahlbegriffs auf die reine Zeitanschauung" [100]).

Ernst Marcus, der sich in seiner Schrift: „Die Zeit- und Raumlehre Kants und ihre Anwendung auf Mathematik und Naturwissenschaften" die Aufgabe gestellt hat, Kants Lehre „konsequent gemäß dem Sinn seiner Lehre anzuwenden" [101]), schreibt über das Zahl-Zeit-Problem: „Die Zeit ist es, die allein das Zählen möglich macht. Zählen lassen sich nur sinnliche Vorstellungen, und diese nur, weil sie in der eindimensionalen Ordnung der Zeit aufeinanderfolgen. Auch wenn wir Stücke im Raume zählen, zählen wir sensuale Vorstellungen, die subjektiv im Zuge der Zeit aufeinanderfolgen. Die Zahl ist also nicht etwa ein bloß erdachter Begriff, sondern ein durch Mitwirken der Sinnlichkeit entstandener Begriff (Kant: ein Schema), und auf ihr beruht die apriorische Arithmetik oder die Lehre von der systematischen Synthesis der Zahlen. Ein notwendiger (kaum bemerkbarer) Koeffizient derselben ist also die Zeit, die ihren letzten Grund, das Zählen möglich macht. Ohne sie würden die Vorstellungen nicht in einer zählbaren Ordnung stehen.

97) S. 437.
98) S. 738.
99) S. 653 f.
100) S. 74.
101) Einleitung.

Ohne die Funktion des Zählens gibt es keine Arithmetik“ [102]). (Hier liegt ein stärkerer Psychologismus vor als bei Kant selbst.)

Heinemann sieht eine Schwierigkeit darin, daß nach Kant sowohl die Zeit als auch die Zahl Schema sein soll. Er fragt: „Wie sollen wir die Doppelheit verstehen: die Zahl Schema und die Zeitreihe Schema? Schließt sich beides nicht aus? Entweder die Zahl, oder die Zeit?“ Aber dies ist in Wahrheit keine Schwierigkeit, da nach Kant die Zeit das allgemeine Schema ist, das allen besonderen Schemata zugrundeliegt; die Zahl aber ist eines der besonderen Schemata, nämlich das zur Kategorie der Allheit gehörige. Der Versuch der Auflösung dieser vermeintlichen Schwierigkeit führt nun Heinemann zu einem für uns wichtigen Ergebnis. Sein Gedankengang ist folgender: Man muß sich die Frage stellen: „was ist dieses Orts überhaupt der Sinn der Zeit, der Sinn der Zahl?“ „Von der Zeit wird es ohne weiteres klar: es kann sich nur um ein Moment in ihr handeln, um die Reihenbestimmung“. Und nicht „von der mathematischen Zahl“ ist die Rede, „sondern nur von einem Moment der Zahl, freilich einem tiefliegenden und gewichtigen, dem Reihenmoment der Zahl“ [103]). Richtiger wäre es zu sagen, es sei nur „von der natürlichen Zahl“ (statt: „von einem Moment der Zahl“) — die aber doch „eine mathematische Zahl“ ist — die Rede. Der natürlichen Zahl ist eben das Reihenmoment eigentümlich, insofern als die Gesamtheit der natürlichen Zahlen in einer Reihe angeordnet werden kann. Auch ist die Reihe der natürlichen Zahlen der Typus aller (gesetzmäßigen) Zahlreihen; denn jede andere Zahlreihe ist nur möglich, weil es die Reihe der natürlichen Zahlen gibt [104]). Da es sich aber um die natürlichen Zahlen bei Kant handelt, können wir mit Heinemann sagen, es sei bei ihm insbesondere vom Reihenmoment der Zahl die Rede. Für Heinemann verschwindet jetzt die Schwierigkeit, die er zuvor feststellte: „indem ein Moment der Zahl erzeugt wird, wird ein Moment der Zeit erzeugt“. Zweierlei wollen wir aus den Überlegungen von Heinemann festhalten: 1. Zahl und Zeit haben ein gemeinsames Moment. Irgendeine Gemeinsamkeit besteht also zwischen ihnen. 2. Diese Gemeinsamkeit liegt nicht im anschaulichen Moment des Zeitlichen. In diesem den Kantschen Zahlbegriff sehen zu wollen, hält Heinemann — mit Recht — für gänzlich verfehlt. „Es ist nicht die Absicht Kants, die Zahl auf die Zeit zu begründen. Das ist stark zu unterstreichen, weil man diese Meinung häufig als die Kantische angeführt findet“ [105]). (Hier ist natürlich von der Zeit, soweit sie Anschauungsform ist, die Rede.) Was aber i s t jenes Gemeinsame? Das Reihenmoment! Was ist aber das

102) S. 112.

103) S. 148.

104) In mathematischer Schreibweise wird ja eine Reihe (wir müßten übrigens in mathematischer Terminologie „Folge“ sagen) in der Form $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dargestellt. Mit a_n bezeichnet man das „allgemeine Glied“ der Reihe, aus welchem sich die Reihe selbst ergibt, indem man n die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, . . . durchlaufen läßt. Ist etwa $a_n = \frac{n+1}{n}$ so lautet die Reihe: 2, 3/2, 4/3, 5/4, . . ., oder ist das allgemeine Glied $a_n = \frac{1+2n}{3n}$, so lautet die Reihe (3/3 =) 1, 5/6, 7/9, 9/12, 11/15, 13/18, . . .

105) S. 148.

Reihenmoment genauer? Wir gehen wohl nicht fehl, wenn wir Heinemanns Meinung hier in Übereinstimmung mit derjenigen Cassirers vermuten, der, in dieser Frage klarer als Heinemann, bemerkt, „daß es sich für Kant hier um die „transzendentale" Begriffsbestimmung der Zeit handeln kann, nach welcher sie als der Typus der geordneten Folge erscheint" [106]). In den zitierten Stellen von Mörchen, Becker, Gent, Marcus klingen ähnliche Deutungen (jeweils in Formulierungen, die der Denkform bezw. der philosophischen Richtung des betr. Autors entsprechen, zum Ausdruck gebracht) an. Auch nach Cassirer wird bei Kant ein gewisses Moment am Zeitbegriff, das nicht das anschauliche ist, mit dem Zahlbegriff in Verbindung gebracht. Cassirer geht sogar so weit, aus Kants Äußerung, daß „unser Zählen eine Synthesis nach Begriffen" ist, zu folgern, daß nach Kant „die gesamte Arithmetik von einer synthetischen Leistung des Intellekts" abhängig ist. Dementsprechend gibt er Couturat, einem der bekanntesten Vertreter moderner mathematischer Philosophie, im Namen Kants „die rein logische Natur der mathematischen Urteile" zu (um dann jedoch — gegen Couturat — zu behaupten, daß aus der rein logischen Natur nicht der analytische Charakter der Urteile folge).

Wie Cassirer, so deutet auch Natorp Kants Zahl- und Zeitbegriff rein intellektualistisch. „Das ist der... Sinn der Aufstellung Kants (in den Beweisen seiner drei „Analogien der Erfahrung"): daß die objektive Zeitfolge des Geschehens eine Konstruktion der Erkenntnis sei" [107]). Dasselbe gilt für Natorp von der Zahl, „die als unmittelbarer Ausdruck des Verfahrens der Synthesis, zunächst der Quantität, von Kant ähnlich wie von uns gedeutet wird" [108]). Wie aber deutet Natorp Zeit und Zahl? Er läßt beide aus dem reinen Denken entstehen, und — dies ist in diesem Zusammenhang das Interessante für uns — er will dieses Entstehen beidemal nicht psychologisch verstanden wissen. „Das Werden — ist, der Gang — besteht, die Entwicklung ins Unendliche findet statt, so objektiv wie nichts anderes. Subjektiv, bloß für uns gültig, sind im Gegenteil alle willkürlichen Abschlüsse, die uns Stillstand vortäuschen, wo in der Wahrheit der Sache ewiger Fortgang ist.... Dieser Gang ist kein Zeitgang, also gewiß kein psychologischer oder bloß historischer. Zeit ist selbst nur einer seiner Ausdrücke" [109]). Und über die Entstehung der Zahl aus dem Denken lesen wir: „Was heißt es aber, daß die Zahl ihren Ursprung im reinen Denken hat? Vom Denken als Tun oder psychologischen Vorgang hat die Logik nichts zu sagen. Dem Inhalte nach ist Denken: Setzen von Beziehung" und so ist auch „Zahlsetzung Setzung von Beziehung" [110]). Wenn Aloys Müller — ohne direkte Bezugnahme auf Natorp — die Theorie der Entstehung der Zahl durch Setzung ablehnt mit der Begründung: „Jenes wiederholte Setzen ist ein Wiederholen psychischer Vorgänge, aber nicht ein Wiederholen des gesetzten Gegenstandes" [111]), so wird Na-

106) Kant und die moderne Mathematik, S. 35; vgl. Hamiltons Definition der Algebra als „Science of pure time or order of progression".
107) S. 345.
108) S. 164.
109) S. 17.
110) S. 99.
111) Gegenstand der Mathematik, S. 34.

torp diesen Einwand nicht gelten lassen (mit welchem Bemerken wir hier nichts gegen oder für die Berechtigung des Einwandes sagen wollen), weil es für ihn eben ein nicht psychologisch zu verstehendes Setzen gibt. Eine ähnliche Auffassung wie bei Natorp liegt bei Kant vor. Denn sicher beruht für Kant die Zahl m i t auf einer Tätigkeit des Denkens (und zwar einer Tätigkeit, die gleichzeitig ein bestimmtes Moment des Zeitschemas erzeugt), und sicher ist diese Tätigkeit (die Kant auch die „rein intellektuelle Synthesis" nennt, welcher Begriff dem „Setzen von Beziehung" Natorps entspricht) nicht als psychischer Ablauf zu verstehen.

Der Unterschied zwischen der Auffassung Kants und der Natorps und Cassirers — den dieser wie jener nicht sehen; vielmehr deuten sie Kant nach dem Geiste ihrer eigenen Theorie — liegt nun darin, daß für Kant die intellektuelle Tätigkeit nur m i t bestimmender Faktor für die Zahl ist. Das sieht z. B. Cohen, der im wesentlichen Natorps und Cassirers Ideen über Zahl und Zeit teilt, klar. Er zieht einen scharfen Trennungsstrich zwischen Kants und seiner Auffassung (wiewohl er seine für die letzte konsequente Fortbildung der Kantischen hält). Zwar meint auch Cohen, daß da, wo die Zeit bei Kant als Begründung der Zahl auftritt, „es ist, als ob die Zeit auf die intellektuelle Bahn des Denkens geriete". Aber das ändert nichts daran, daß sie „mehr zu bedeuten haben" soll, „als Denken zu bedeuten hat; sie soll Gegebenheit vertreten. Auch diese Gegebenheit ist zwar rein ... aber diese Art der Reinheit soll dennoch von derjenigen unterschieden bleiben, über welche das Denken verfügt. Indessen diesen Unterschied in der Reinheit bestreiten wir". Cohen weist, um darzutun, daß die Zeit in der Philosophie Kants nicht wie bei ihm reines Intellekterzeugnis ist, darauf hin, „daß bei Kant die Zeit nicht sowohl zum Fundament der Zahl wird, sondern vorzugsweise zu dem der Bewegung" [112]). In der Tat lautet auch die Fortsetzung der (von uns S. 25 zitierten) „Prolegomena"-Stelle, in der Kant die Arithmetik auf die Zeit begründet: „vornehmlich aber reine Mechanik kann ihre Begriffe von Bewegung nur vermittelst der Vorstellung der Zeit zu Stande bringen". Es ist gar nicht zu leugnen, daß bei Kant die Zeit ein Anschauungsmoment besitzt; und wenn auch die Arithmetik sich nicht auf die Zeit gründet, insofern und insoweit sie dieses Anschauungsmoment besitzt, so darf doch nicht außer acht gelassen werden, daß es n u r e i n e Zeit bei Kant gibt und daß infolgedessen Anschauliches der Arithmetik, wenn es auch ihre Gegenständlichkeit nicht direkt mitbestimmt, doch mittelbar anhaftet [113]).

---

112) S. 150.

113) Zwei wesentlich verschiedene Faktoren, von denen der eine dem Intellekt, der andere der Sinnlichkeit zugewandt ist, weist ähnlich wie der Kantsche der Zeitbegriff bei Riehl auf, mit dem Unterschied jedoch, daß für Riehl der eine Faktor apriorischer, der andere empirischer Natur ist, während für Kant beide apriorisch sind. Für Riehl „fällt die Behauptung der ausschließlichen und reinen Apriorität der Zeit fort". Der Intellekt oder das Bewußtsein verbindet die aufeinander folgenden Erlebnisse oder Empfindungen zu einer . . . Reihe (vgl. oben S. 56). Wir kommen zum Begriff der „reinen Zeit", „wenn wir auf die bloße Form" der Einheitsfunktion im Nacheinander achten, auf das „Denken der Zeit" oder die „synthetische Identitätsfunktion" (Gent, S. 344).

Daß „das Wesen der Zeit einheitlich" ist, hebt mit besonderem Nachdruck Aloys Monzel hervor. Er macht die Unterscheidung „zwischen der objektiven Zeit und der Zeit als Form des inneren Sinnes", die in den kritischen Schriften Kants vorliegt und übrigens schon 1775 konstatierbar ist, „da hier die Hauptelemente für die Ausgestaltung der Lehre vom inneren Sinn gegeben sind", wie die Publikation Th. Haerings „Der Duisburg'sche Nachlaß und Kants Kritizismus um 1775" zeigt[114]). „Die objektiven Zeitverhältnisse" gehören nach Monzel in den „nicht mit der inneren Erfahrung zu verwechselnden inneren transzendentalen Sinn", „zu den Kategorien", dem „subjektiv-inneren Sinn" wird von ihm dagegen „nur die empirische Successivität der Bewußtseinsaktivität" zuerkannt[115]). Nach Monzel hat also „der transzendentale innere Sinn" bei Kant „eine doppelte Aufgabe zu erfüllen: er soll eine unräumliche, empirische Innenwelt in beständiger Successivität ermöglichen und in seinem Schematismus die Gesetzmäßigkeit und Ordnung der Außenwelt im Zeitablauf regeln"[116]). Schon im „Nachlaß" wird, wie in den kritischen Schriften, „die Objektivierung der Zeitverhältnisse des inneren Sinnes durch die Kategorien bezw. Analogien" angenommen[117]). Auch Monzel hält im Sinne Kants „an einem doppelten Zeitbegriffe fest, an Zeitverhältnissen des objektiv-inneren Sinnes, allerdings nur auf der Grundlage einer wertvollen begrifflichen Unterscheidung. Die Zeitverhältnisse sind nicht real, sondern nur modal differenziert .... Wir behaupten keine real differenzierte äußere und innere Zeit, sondern eine modal verschiedene Wirkungsweise ein und derselben Zeit als „Form" des einen transzendentalen inneren Sinnes"[118]) „Der Schwerpunkt aller Untersuchung der „Kritik" (ist) das Erkenntnissubjekt, das nur e i n e n Zeitcharakter, darum nur e i n e n inneren Sinn, wenn auch verschiedene Wirkungsweisen reiner Zeitform gestattet"[119]).

Verwandt ist mit der Unterscheidung Monzels diejenige von Marcus zwischen einem primären und einem sekundären Schematismus. Der primäre Schematismus betrifft die reinen Anschauungsformen. Mit ihm „entstehen die Vorstellungen von Zeit und Raum und diese müssen schon entstanden sein, bevor irgendeine materielle Erkenntnis (welche auf Empfindungen beruht) entstehen kann". Diesem Schematismus entsprechen also Marcus „Kategorialfunktionen"[120]) und Monzels „Zeitverhältnisse des subjektiv-inneren Sinnes"; der „sekundäre Schematismus" ist „derjenige, der sich auf die empirischen Data der Sinnlichkeit, auf „die Materie der Empfindung" bezieht". Marcus nennt deshalb diesen Schematismus auch

114) Monzel, Kantstudien, Bd. 25, S. 428 — Eingehende Begründung von Monzels Interpretation der Kantschen Lehre vom inneren Sinn und Auseinandersetzungen mit anderen Auffassungen finden sich in seiner älteren Schrift: „Kants Lehre vom inneren Sinn", 1913.

115) A.a.O., S. 433.

116) A.a.O., S. 428.

117) A.a.O., S. 429.

118) A.a.O., S. 434.

119) A.a.O., S. 429.

120) Vgl. oben S. 39.

den „Materialschematismus“ [121]). Dieser allein wird in der Kr. d. r. V. behandelt [122]). Der „Material-Schematismus“ hat nun „eine besondere Eigentümlichkeit. Er erfaßt nämlich unmittelbar nicht die Raumform, sondern nur die Zeitform der Data... Die Data (die empirisch gegebene Materie) können wir in Ansehung ihres Verhältnisses zum Raum gar nicht unmittelbar beurteilen, weil sie uns ursprünglich gar nicht räumlich, sondern ausschließlich zeitlich, d. h. als Affekte des inneren Sinnes gegeben sind, deren jeder als besondere Vorstellung auf den anderen folgt, so daß sie nur successiv auftreten“. Wie dem primären Schematismus die „Kategorialfunktionen“, so entsprechen dem sekundären Schematismus die „eigentlichen Kategorien“, in denen „zugleich die Antizipation des eigentlichen Objekts“ liegt [123]).

Schematismus, innerer Sinn, Einbildungskraft, Zeit: — Begriffe, die bei Kant in die gleiche Sphäre gehören, in eine apriorische, subjektive Sphäre, die zwischen Sinnlichkeit und Verstand gelegen ist und zu beiden engste Beziehungen aufweist. Welcher Art diese Beziehungen sind, wird durch den Zusammenklang der letztangeführten Kantinterpretationen besonders deutlich. Die Gemeinsamkeiten in diesen, die zugleich naturgemäß die allgemeinsten Gesichtspunkte sind, welche sicher an der wahren Meinung Kants nicht vorbeigehen, genügen uns im Hinblick auf unser Ziel einer allgemeinen Charakteristik der Kantschen Philosophie der Arithmetik.

Nach dem Vorigen können wir nun über das Zahl-Zeit-Problem bei Kant zusammenfassend folgendes sagen:

1) Das Kantsche System zwingt zu der Annahme, daß bei Kant ein ontischer Zusammenhang zwischen Zahl und Zeit besteht.

2) Die Zahl ist insofern mit der Zeit verbunden, als sie in und mit der Zeit durch die zusammenfügende und zusammenfassende Tätigkeit des Verstandes erzeugt wird. Sie ist das Produkt des Zählens, das in der Zeit verläuft.

3) Dieses ontische Verbundensein von Zahl und Zeit darf in diesem Zusammenhang nicht empiristisch-psychologistisch, das „Zählen“ nicht als psychischer Vorgang aufgefaßt werden.

4) Der Grund für die unter 3) ausgesprochene Möglichkeit der Deutung liegt in der Eigenart der mit der Schematismuslehre engstens zusammenhängenden Kantischen Zeitauffassung, die wir durch Heranziehung analoger und deutlicher als bei Kant gekennzeichneter Auffassungen im Neukantianismus, besonders bei Natorp, verständlich zu machen versuchten.

Es ergibt sich: Sowohl eine logizistische wie auch eine psychologistische Deutung der Kantschen Zahllehre ist abzulehnen.

Die folgende Figur soll einen Aufriß des Kantschen Gegenstands- und Wissenschaftssystems darstellen, in welchem besonders auch der Ort der Arithmetik präzise gekennzeichnet ist.

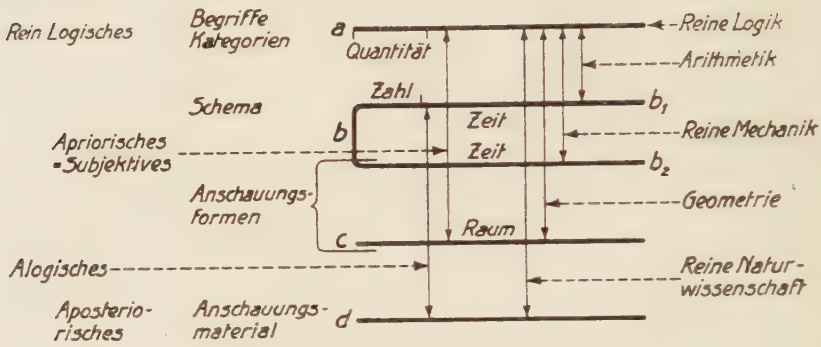
In dieser Figur stellt a die Sphäre des rein Logischen, der Begriffe und der Kategorien dar, b die Sphäre der Zeit, c die des Raumes und d die des empirisch Gegebenen, des Anschauungsma-

121) Die oben erwähnte Curtiussche Unterscheidung zwischen Subsumtions- und Synthesis-Schematismus betrifft selbstverständlich nur den „Materialschematismus“.

122) Tiefen des Erkennens, S. 132.

123) A.a.O., S. 167.

terials. b ist doppelt geschichtet, und zwar ist die Schicht b_1 dem Bereich des Denkens und die andere, b_2, dem Bereich der Anschauung zugewandt, gemäß dem Doppelcharakter, den die Zeit trägt, indem sie zugleich Form der Anschauung wie der Raum, aber auch durch rein intellektuelle Synthesis erzeugtes Gebilde ist. Die Sphären b, c und d sind alogisch, die Sphären a, b und c sind apriorisch



und subjektiv. An der Bildung naturwissenschaftlicher Gegenstände sind alle vier Sphären beteiligt, an der Bildung der geometrischen die Sphären a, b und c; a und b allein bedingen die reine Bewegungslehre oder Mechanik, die ohne die Zeit als Form der sinnlichen Anschauung (b_2) nicht auskommen kann; die Arithmetik bedarf dagegen zur Konstitution ihrer Gegenstände (außer der Sphäre a) nur der Sicht b_1 der Sphäre b, d. h. also nur der Zeit, soweit sie die intellektuelle Bestimmtheit des Reihenmoments aufweist. Einzig die reine Logik, die aber nicht Wissenschaft im eigentlichen Sinne ist, sondern nur Propädeutik zu jeder Wissenschaft, ist auf die Sphäre a beschränkt. Die Figur zeigt, daß von allen mathematischen Disziplinen, überhaupt von allen Wissenschaften, die Arithmetik der reinen Logik am nächsten steht, daß sie aber doch nicht mit ihr ganz in dieselbe Sphäre fällt, da die Schicht b_1 von b an der Arithmetik Anteil hat und b_1 mit b_2 — wie in der Figur angedeutet ist — unzertrennlich verbunden ist. Wegen dieser Verbindung geht Alogisches in die Arithmetik ein, und insofern noch, als alle tiefer gelegenen Sphären (die alle alogisch sind), auch wenn sie nicht direkt an der Gegenstandsbildung beteiligt sind, doch einen Prüfstein für alle Gegenstände bilden, indem diese auf sie müssen angewandt werden können.

Wie Kant über die abgeleiteten Zahlen im einzelnen urteilen muß, ist nach dem Bisherigen fast selbstverständlich. Über die negativen Zahlen handelt die von uns früher schon erwähnte Schrift über die negativen Größen aus der vorkritischen Zeit, die wir, soweit die Mathematik hinsichtlich unserer Problemstellung in Betracht kommt, ohne weiteres in das Ideengefüge der Vernunftkritik einbauen können. In einem Brief an Rehberg (vom 25. Sept. 1790) äußert Kant sich über das Problem der Irrationalzahlen und berührt kurz das Problem der imaginären Zahlen. Über Brüche, also

über die rationalen, aber nicht ganzen Zahlen, liegt uns keine Äußerung Kants vor. Wir können aber feststellen, daß Kant die reellen Zahlen als mathematisch zulässig, dagegen die imaginären, und mithin auch die komplexen Zahlen, als „unmöglich" ansieht. Ein Grund dafür liegt darin, daß den reellen Zahlen eine Anschauung korrespondiert, den imaginären dagegen nicht. Man sieht also, daß die Kantsche Grundauffassung vom wissenschaftlich brauchbaren Gegenstand sehr entscheidend auf die Grenzziehung des mathematischen Gegenstandsbereichs einwirkt.

Inwiefern nun korrespondiert den negativen Zahlen und der Null eine Anschauung? Gibt es denn negative Dinge oder das Nichts im Bereich der sinnlichen Sphäre? Sicherlich nicht. Es kann daher auch nicht der Sinn der Null und der negativen Zahlen sein, das Nichts und negative Dinge zu repräsentieren. Wäre das ihr Sinn, oder müßte das ihr Sinn sein, so hätten sie in Wahrheit keinen Sinn. Ihre Einführung in die Mathematik wäre vom Standpunkt Kants unberechtigt. Kant klärt das Problem durch die Unterscheidung zwischen logischer und Realrepugnanz. Die logische Repugnanz „besteht darin: daß von eben demselben Ding etwas zugleich bejaht und verneint wird. Die Folge dieser logischen Verknüpfung ist gar nichts (nihil negativum irrepräsentabile), wie der Satz des Widerspruchs aussagt." „Die zweite Opposition, nämlich die reale, ist diejenige: da zwei Prädicate eines Dinges entgegengesetzt sind, aber nicht durch den Satz des Widerspruchs. Es hebt hier auch eins dasjenige auf, was durch das andere gesetzt ist; allein die Folge ist Etwas (cogitabile)[124]). Logische Repugnanz liegt also dann vor, wenn einem Gegenstand eine Bestimmtheit zugleich beigelegt und nicht beigelegt wird. Ein solcher Gegenstand ist unmöglich und existiert daher nicht. Reale Repugnanz meint das gleichzeitige Vorhandensein zweier entgegengesetzter und sich ganz oder zum Teil gegenseitig aufhebender Bestimmtheiten an einem Gegenstande. Diese ist durchaus möglich und etwa dann vorhanden, wenn in einem Körper eine Kraft in bestimmter Richtung und gleichzeitig eine andere in entgegengesetzter Richtung wirkt, sodaß die Kräfte sich ganz oder teilweise aufheben. Ein Beispiel für logische Repugnanz aber hätten wir dann vor uns, wenn ein Körper durch eine Kraft zugleich bewegt und nicht bewegt würde, was offensichtlich unmöglich ist. Negative Zahlen beziehen sich nun nur auf die Realrepugnanz. Wie es gleichgültig ist, welche von zwei in der Natur wirkenden entgegengesetzten Kräften ich positiv, welche ich negativ nenne, so ist auch in der Mathematik der Begriff „negative Zahl" ein Relativbegriff. Zahlen heißen nur dann negativ, wenn sie bei Anwendung in der sinnlichen Wirklichkeit etwas bezeichnen, das einem anderen im Sinne der Realrepugnanz entgegengesetzt ist. „Eine Größe ist in Ansehung einer anderen negativ". Man kann „also eigentlich keine Größe schlechthin negativ nennen", sondern muß sagen, „daß + a und — a eines die negative Größe des anderen sei; allein, da dieses immer im Sinne kann hinzugedacht werden, so haben die Mathematiker einmal den Gebrauch angenommen die Größen, vor denen das — steht, negative Größen zu nennen, wobei man gleichwohl nicht außer der Acht lassen muß,

124) Werke, Bd. 2, S. 171.

daß diese Benennung nicht eine besondere Art Dinge ihrer inneren Beschaffenheit nach, sondern dieses Gegenverhältnis anzeige, mit gewissen anderen Dingen, die durch + bezeichnet werden, in eine Entgegensetzung zusammen genommen zu werden“ [125]). Kant bestreitet also keineswegs den negativen Zahlen das Daseinsrecht in der Mathematik; sie können „mit Hilfe der natürlichen Zahlenreihe erfaßt werden und bedeuten dann nicht anderes als eine zweite Anwendung der Reihe der natürlichen Zahlen unter gleichzeitigem Hinweis auf eine erste“ [126]). Sie sind also nicht mathematisch selbständige Gebilde wie die natürlichen Zahlen, sie sind nichts anderes als die natürlichen Zahlen in besonderer Benennung.

Logische Berechtigung besitzen auch die irrationalen Zahlen, soweit ihnen eine Anschauung entspricht. $\sqrt{2}$ etwa ist darstellbar als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen beide Katheten die Länge 1 haben. Aber $\sqrt{2}$ ist nicht als Bruch darstellbar wie eine rationale Zahl, ist nicht „in Zahlen“ denkbar. Das Irrationale macht es für Kant besonders deutlich, daß ohne die Zeitanschauung in der Arithmetik nicht auszukommen ist. „Daß aber der Verstand, der sich willkürlich den Begriff von $\sqrt{2}$ macht, nicht auch den vollständigen Zahlbegriff, nämlich durch das rationale Verhältnis derselben zur Einheit hervorbringen könne, sondern sich, gleichsam von einem anderen Vermögen geleitet, müsse gefallen lassen in dieser Bestimmung eine unendliche Annäherung zur Zahl einzuschlagen, das hat in der That die successive Fortschreitung als die Form alles Zählens und der Zahlgrößen, als die dieser Größenerzeugung zum Grunde liegende Bedingung, die Zeit, zum Grunde“ [127]). $\sqrt{2}$ ist also zunächst ein reiner Begriff, dieser muß aber durch Zahlen darstellbar sein, da ihm sogar Anschaulichkeit a priori (Dreieckhypotenuse) zukommt. Diese Darstellung in Zahlen ist aber nur mit Hilfe der Zeitanschauung möglich.

Die imaginäre Zahl lehnt Kant aus rein logischen Gründen ab, ohne die Frage nach der Anschaulichkeit erst zu stellen. „Gar keiner Synthesis, in der Zeit“ bedarf „die Einsicht der Unmöglichkeit der Wurzel aus einer negativen Größe $\sqrt{-a}$ (in welcher sich die Einheit, als positive Größe, zu einer anderen = x eben so verhalten müßte wie diese zu einer negativen (Anm.: Da dieses widersprechend ist, so ist $\sqrt{-a}$ der Ausdruck für eine unmögliche Größe.) welche sich, ohne Zeitbedingung damit zu bewegen, aus bloßen Größenbegriffen erkennen läßt“ [128]). Dietrich Meyer glaubt die

125) Werke, Bd. 2, S. 174.
126) Dietrich Meyer, S. 37.
127) Briefwechsel, Bd. 2, S. 197.
128) Briefwechsel, Bd. 2, S. 197. — Ähnlich wie Kant urteilt F. Medicus über die imaginären Zahlen, insofern er sie für in sich widerspruchsvoll hält, ohne sie jedoch deshalb aus der Mathematik verbannen zu wollen.“ “$\sqrt{-1}$ bedeutet eine unvollziehbare Aufgabe; das reflektierende Denken kann den Inhalt dieses Symbols nicht bestimmen; „i“ ist nicht konstruierbar; es existiert nicht . . . In der Mathematik, sagt Frege, ist „ein Begriff zulässig, auch wenn seine Merkmale einen Widerspruch enthalten; man darf nur nicht voraussetzen, daß etwas unter ihn falle“. So ist „i“ allerdings in der Mathematik zulässig, d. h. möglich: da aber niemals „etwas“, d. h. etwas Ausgedehntes = i sein kann, hat es keine Gegenständlichkeit, keine Existenz

imaginäre Zahl im Sinne Kants auf eine Stufe mit der negativen stellen zu können [129]); beide seien als benannte Zahlen aufzufassen; wie nämlich die Benennung der negativen Zahlen die negative Einheit sei, so sei die Benennung der imaginären Zahlen die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$. In beiden Fällen liege die Anwendung der natürlichen Zahlreihe unter Zugrundelegung einer neuen Einheit vor. Das könnte aber Kant aus zwei Gründen nicht zugeben. Einmal deshalb nicht, weil er, wie wir bereits sahen, den Begriff der imaginären Zahl ($\sqrt{-a}$) für in sich widerspruchsvoll hält. Dann aber auch deshalb nicht, weil die imaginäre Zahl gar nicht in ähnlicher Weise wie die negative auf die Naturwirklichkeit anwendbar ist. Denn die Darstellung in der (Gauß'schen) Zahlenebene ist eine willkürliche Art der geometrischen Veranschaulichung der komplexen Zahl, aber die Zahlenebene ist nicht eine naturgegebene Anschauungsgrundlage, wie sie die negativen Zahlen besitzen.

Dagegen hat Meyer die (gebrochenen) rationalen Zahlen, also die Brüche, über die wir bei Kant keine direkte Äußerung finden, im Sinne Kants logisch richtig beurteilt. Sie können für Kant auch nicht Zahlen sein, denen eine selbständige mathematische Existenz zukäme, aber ihre Anwendbarkeit kann wohl als gesichert gelten. „Indem ich nun zähle $^1/_3$, $^2/_3$, $^3/_3$, $^4/_3$ usw., übe ich, vom rein logischen Standpunkt aus gesehen, genau dieselbe Tätigkeit aus, als wenn ich 1, 2, 3, 4 usw. zähle ... Wir kommen ... zu dem Ergebnis, daß wir in der Reihe der gebrochenen Zahlen in dieser Auffassung keine neuen Zahlen und auch keine Modifikation des Zahlbegriffs vor uns haben. Wir haben es nur zu tun mit verschiedenen Anwendungen derselben Begriffe, wobei die Verschiedenheit der Anwendung uns zum Bewußtsein kommt und auch ausgedrückt wird, so daß wir in der Lage sind, von der einen Anwendungsform ohne große Mühe zu der anderen überzugehen [130]).

Geben wir auf Grund des Vorherigen noch einen kurzen zusammenfassenden Überblick über die Gruppen, in denen die Gesamtheit der „komplexen Zahlen" vom Gesichtspunkt der Kant-Philosophie der Arithmetik aus zerfällt:

1.) Einzig die natürlichen Zahlen können als selbständige mathematische Gebilde angesehen werden.

2.) die negativen und positiven ganzen und gebrochenen rationalen Zahlen sind nichts anderes als die natürlichen Zahlen in besonderer Benennung und mit besonderer Anwendungsmöglichkeit. Sie sind also unselbständige, aber zulässige Gegenstände der Mathematik.

---

im Sinne der Mathematik. Es ist kein bestimmtes Gebilde des reflektierenden und konstruierenden Denkens . . sein mathematischer Wert besteht in seiner Möglichkeit, d. h. darin, daß man mit ihm operieren kann. Der Beweis der mathematischen Möglichkeit liegt lediglich in solcher tatsächlichen Brauchbarkeit; er wird also in der Sphäre der mathematischen Existenz geführt" (S. 18). „Mathematische Existenz hat nur dasjenige, was konstruiert werden, d. h. was als bestimmtes Gebilde aus dem Material der reinen Ausdehnung geschaffen werden kann . . . Die Konstruktion gibt dem in mathematischer Reflexionsweise Gedachten seine bestimmte Gegenständlichkeit, sie ist der Beweis seiner Existenz" (S. 17).

129) S. 37.

130) S. 30.

3.) Die irrationalen Zahlen sind, soweit sie im Sinne der mathematischen Zahlentheorie „algebraische Zahlen" sind, zunächst von der Basis der natürlichen Zahlen aus auf rein logischem Wege gewonnene widerspruchsfreie Begriffe. Lassen sie sich nachträglich als anwendbar erkennen (wie etwa $\sqrt{2}$), so erweisen sie sich damit als spezifisch mathematische Gebilde. Als solche sind dann auch die transzendenten irrationalen Zahlen anzusehen, sofern ihnen eine Anschauung korrespondiert.

4.) Die imaginären Zahlen sind logisch nicht möglich und erst recht nicht anwendbar, also in der Mathematik gänzlich unmöglich. Komplexen Zahlen, deren Imaginärteil von Null verschieden ist, kommt also für Kant keine Gegenständlichkeit zu.

Es erübrigt sich fast, auf die Frage der mathematischen Methode bei Kant noch einzugehen, weil sie im Grunde bei der Erörterung des mathematischen Gegenstands mitbehandelt ist. Vollends über die arithmetische Methode im besonderen haben wir nichts mehr zu erwähnen. Wir bemerkten früher schon [131]), daß Gegenstands- und Methodenfrage bei Kant nicht scharf geschieden sind. Das rührt wohl letztlich daher, daß die Gegenstände der Wissenschaften für ihn subjektbestimmt sind. Von diesem Standpunkt aus steht natürlich gar nichts im Wege, sich die Erzeugung der Methoden als mit der Erzeugung der Gegenstände gleichzeitig erfolgend zu denken. Denn wo etwas erzeugt wird, wird nach einer Methode erzeugt. Die Konstruktion der mathematischen Gegenstände, durch die diese überhaupt erst werden, ist die mathematische Methode. Es ist „die Methode der Mathematik, die ihr Objekt bestimmt" [132]). Die Charakterisierung der Wissenschaften geschieht infolge dieser Auffassung bei Kant stärker auf Grund der Methoden als auf Grund der Gegenstände der Wissenschaften [133]). Indem wir also Kant nach den Unterschieden der Wissenschaften befragen, haben wir von ihm Aussagen über Methodisches zu erwarten. Fragen wir nach dem Verhältnis von Mathematik und Philosophie! Kant hebt den methodischen Unterschied dieser beiden Wissenschaften immer wieder hervor. In der transzendentalen Methodenlehre der Kr.d.r.V. (I. Hauptstück, 1. Abschnitt: „Die Disciplin der reinen Vernunft im dogmatischen Gebrauche") heißt es: „Die philosophische Erkenntnis ist die Vernunfterkenntnis aus Begriffen, die mathematische aus der Construction der Begriffe" [134]). Diesen Unterschied hatte Kant bereits mit eingehender Begründung dargelegt in der Preisschrift des Jahres 1764 über die „Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und der Moral". Wir lesen dort: „Es ist das Geschäfte der Weltweisheit, Begriffe, die als verworren gegeben sind, zu zergliedern, ausführlich und bestimmt zu machen, der Mathematik aber, gegebene Begriffe von

131) Vgl. oben S. 24.

132) Vgl. Couturat, S. 248.

133) Warum uns das nicht hinderte, die Fragestellung an Kant primär gegenstandstheoretisch zu fassen, legten wir oben S. 15 ff. dar. Unsere dortigen Ausführungen über den Zusammenhang erkenntnistheoretischer und gegenstandstheoretischer Fragestellung lassen sich leicht übertragen auf das Verhältnis von Gegenstands- und Methodenfrage.

134) Werke, Bd. 3, S. 469.

Größen, die klar und sicher sind, zu verknüpfen und zu vergleichen, um zu sehen, was hieraus gefolgert werden könne“ [135]). Wodurch sind aber diese Begriffe gegeben? Durch „willkürliche Verbindung“ — heißt es in dieser früheren Schrift. Daß diese „Verbindung“ — später sagt Kant „Konstruktion“ auf Grund der apriorischen Anschauungsformen geschehe, hat Kant in dieser Zeit noch nicht aussprechen können, weil er zur Unterscheidung von Anschauung und Begriff und zur Lehre von der Apriorität und Subjektivität der Anschauungsformen, die sich in der Dissertation von 1770 (De mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis“) anbahnt, noch nicht vorgedrungen ist. In der Methodenlehre der Kr.d.r.V. kann er endgültig ausführen: „Einen Begriff aber construiren, heißt: die ihm correspondirende Anschauung a priori darstellen“ [136]). Während nun das Zergliedern von Begriffen, das der Philosophie obliegt, allein durch diskursives Denken geschieht, ist das Konstruieren von Begriffen durch Darstellung der ihnen korrespondierenden Anschauungen a priori, wie es die Mathematik unternimmt, nur möglich durch Mitwirkung der Intuition [137]).

IV.

Wenn wir die philosophischen Aussagen Kants zur Mathematik im allgemeinen und zur Arithmetik im besonderen nun einer Kritik unterziehen wollen, so erfordert eine solche naturgemäß eine Auseinandersetzung mit Grundlehren der Kantschen Philosophie. Wir könnten daher eine grundsätzliche Auseinandersetzung voranstellen, wollen aber nicht diesen Weg wählen, sondern den einzelnen Schritten unserer Darstellung der Philosophie der Arithmetik Kants folgen und zusehen, wie weit jede der einzelnen Aussagen haltbar oder nicht haltbar ist. Dieses Verfahren gewährleistet, daß wir nur die zu unserem Zweck notwendig zu berührenden allgemeinphilosophischen Fragen erörtern.

Die erste These Kants, daß alle mathematischen Urteile den Charakter strenger Wissenschaftlichkeit tragen, wird nicht bestritten werden können. Sie zu bestreiten, wäre wohl nur vom Standpunkt des extremsten Empirismus möglich, dessen Vertreter aber selbst vor dieser Konsequenz zurückscheuen [138]). Gegen den Kantschen Wissenschaftsbegriff überhaupt ließe sich einwenden, daß er viel zu eng ist. Die Forderung der Notwendigkeit für die Wissenschaftlichkeit eines Urteils ist durchaus unberechtigt, nicht dagegen die Forderung der Allgemeingültigkeit, d. h. der Gültigkeit „für uns jederzeit und für jedermann“. Urteile über historische Tatsachen sind zweifellos allgemeingültig, aber nicht „notwendig“ im Sinne Kants. Sie sagen nur aus, daß etwas wirklich gewesen ist, aber nicht, daß es notwendig so gewesen ist. Die Tatsache der Möglichkeit solcher

135) Werke, Bd. 2, S. 278.
136) Werke, Bd. 3, S. 469.
137) Prol., § 7, Werke, Bd. 4, S. 281; vgl. auch: Nachlaß, III, S. 487 (2725).
138) Vgl. oben S. 5 f.

Urteile zeigt, daß Notwendigkeit und Allgemeingültigkeit keineswegs, wie nach Kant, „Wechselbegriffe" sind. Jedoch — im Namen der Mathematik braucht kein Einwand gegen den Kantschen Wissenschaftsbegriff erhoben zu werden; denn sie fällt sicher auch unter diesen engen Begriff. Aber vom Standpunkt anderer Wissenschaften, wie etwa der Historie, müßte ein Einwand gegen ihn erhoben werden. Wir bemerken nur beiläufig, daß Kants Wissenschaftsbegriff ja zweifellos orientiert ist an der Mathematik und daß die Historie überhaupt für Kant sehr im Hintergrunde steht. — Wir stimmen Kant also zu, wenn er behauptet, daß den mathematischen Urteilen Notwendigkeit, Allgemeinheit, allgemeine Gültigkeit zukomme.

Kommt ihnen auch „Apriorität" zu? Zweifellos in dem Sinne, daß Urteile in ihrer Geltung unabhängig von der Erfahrung sind. Doch auch beim Problem des Apriorischen dürfen wir eines nicht unerwähnt lassen: daß wir die Folgerung der Apriorität aus der Notwendigkeit nicht als richtig anerkennen können, weil die Voraussetzung, die Kant zu dieser Folgerung führt, nämlich die, daß Notwendigkeit im Erfahrungsbereich nicht begründet liegen könne, unbewiesen ist. In Wahrheit ist sogar das Gegenteil beweisbar. Die exakte Naturwissenschaft besteht aus Urteilen, deren Notwendigkeit ihren Grund im Objekt dieser Wissenschaft, d. h. in der Natur selbst hat. Die Methode der Naturwissenschaft ist die Induktion, die nichts anderes bedeutet als: „Schluß von der Konstanz der Verknüpfungen auf die Notwendigkeit der Verknüpfungen". Daß die Induktion eine zulässige Methode ist und ihre Anwendung vom Gegenstand der Naturwissenschaft erzwungen wird, ist exakt nachzuweisen [139]). Durch die Forderung der Apriorität verengert sich der Kantsche Wissenschaftsbegriff so sehr, daß die Naturwissenschaft nicht mehr unter ihn fallen kann. Kant entgeht dieser Konsequenz nur dadurch, daß er den Begriff „Natur" — durch Hineinnahme apriorischer, also subjektiver Merkmale in den Begriff — so definiert, daß der wissenschaftliche Charakter der Naturwissenschaft in seinem Sinne doch gewährleistet ist [140]).

Zustimmen müssen wir der Behauptung Kants, daß alle mathematischen Sätze synthetisch seien. Nicht voll zustimmen können wir jedoch der Begründung, die er insbesondere für den synthetischen Charakter der arithmetischen (die geometrischen sollen uns hier nicht beschäftigen) gibt. Inwiefern ist denn das Urteil 7 + 5 = 12 synthetisch? Inwiefern wird im Prädikat mehr ausgesagt, als im Begriff des Subjekts schon enthalten ist? Fragen wir uns, welches denn das Subjekt des Urteils, der Gegenstand der Aussage ist! Die Antwort kann nur sein: 7 + 5 und 12, die Summe aus zwei Zahlen und die eine Zahl, sind beide Gegenstand der Aussage. Und ausgesagt wird: — die Gleichheit (genauer: die absolute Gleichheit; es gibt auch nichtabsolute Gleichheit) der beiden Gegenstände. Absolute Gleichheit liegt aber ganz ohne Zweifel in den Gegenständen des Urteils noch nicht begrifflich eingeschlossen. Der Begriff der

---

139) Vgl. A. Müller, Gegenstand der Mathematik, S. 75 ff., Struktur- wissenschaft und Kulturwissenschaft, S. 77 ff. Verwiesen ist dort auf Zilsel, Das Anwendungsproblem, 1916.

140) Vgl. Geyser, Grundlegung der Logik, S. 226.

absoluten Gleichheit im Mathematischen ist aber Kant unbekannt. Die mathematische absolute Gleichheit und die logische Identität sind für ihn dasselbe[141]). Er erkennt infolgedessen nicht das eigentliche Wesen einer mathematischen Gleichung. Er befindet sich lediglich auf dem Weg zur richtigen Auffassung, insofern er mit allem Nachdruck den synthetischen Charakter arithmetischer Urteile betont und ihn zu erweisen versucht. Der Beweis für das Vorliegen einer Synthesis im arithmetischen Urteil enthält bei ihm den Hinweis auf das subjektive Tun, auf das Veranschaulichen beim Rechnen (Zählen an den Fingern u. ä.)[142]). Das ist aber ein Abgleiten, wenn nicht direkt ins Psychologische, so doch — wir können es zunächst nur negativ ausdrücken — in eine Sphäre, die nicht die der reinen zeitlosen Wirklichkeit ist, welche, worauf wir später zurückkommen werden, nach unserer Auffassung die eigentliche mathematische ist. Jedenfalls aber kann man nicht, wie etwa Paulsen, gegen Kant einwenden, die Wahl des Beispiels 7 + 5 = 12 verleite zu der Annahme des synthetischen Charakters der arithmetischen Urteile, bei anderer Wahl, z. B. 10 + 3 = 13, sei der analytische Charakter offenbar[143]). Das zeugt von einer rein psychologischen Auffassung des Problems, die Kant sicher ferngelegen hat. Kant hat richtig erkannt, daß die arithmetische Gleichung wirklich erkenntniserweiternd ist, wenn auch sein Vorgehen bei der Begründung oft den Anschein rein psychologistischer Betrachtungsweise, bei welcher kein Resultat über die Erkenntnisfrage gewonnen werden kann, erweckt[144]).

Indem wir nun die Kantsche Begründung der Apriorität der synthetischen mathematischen Urteile, also die Kantsche Ontologie des Mathematischen, betrachten, müssen wir uns beschäftigen mit dem Raum-Zeit-Problem und mit der Frage der Subjektivität des Apriorischen.

---

141) Vgl. Kr. d. r. V., Werke, Bd. 3, S. 38.

142) Kr. d. r. V., Werke, Bd. 3, S. 37.

143) S. 144.

144) Vgl. die tiefgehende ausführliche Behandlung dieses Problems der arithmetischen Urteile bei Heinrich Rickert (S. 46). Schon darin, daß überhaupt in der arithmetischen Gleichung zwei Gegenstände absolut gleichgesetzt sind, enthält sie nach Rickert, wie die Gleichung 1 = 1, ein alogisches Moment und ist insofern synthetisch. Fallen die beiden Seiten der Gleichung aber, wie in 7 + 5 = 12, nicht einmal unter denselben Begriff, so ist das durch die Gleichung ausgedrückte Urteil in doppelter Weise synthetisch: „erstens als Gleichung überhaupt und zweitens als Gleichung von nicht unter denselben Begriff fallenden Gegenständen". Es scheint uns, daß seit Rickerts unangreifbarem positiven Aufweis des synthetischen Charakters der arithmetischen Urteile endgültig feststeht, daß alle Versuche, wie sie besonders von Seiten der Logistik unternommen worden sind, gegen Kant den analytischen Charakter der arithmetischen Urteile darzutun, scheitern müssen. Rickert beschreitet den einzig möglichen Weg, der in der Philosophie der Zahl zum Erfolg führen kann, indem er seinen Ausgang nimmt von der Frage nach dem Sinn einer Zahlgleichung. Im Gegensatz dazu neigen Vertreter logizistischer Theorien vielfach dazu, in psychologistischer Weise „von der Operation des Zählens auszugehen, um die Zahlen zu verstehen" (v. Aster, S. 106). Aus der Sinnanalyse der Gleichung 1 = 1 ergibt sich, daß es beliebig viele (einander absolut gleiche) Gegenstände 1 gibt, die alle unter den (einen) Begriff der Eins fallen. Mit „Metaphysik", wie Rosenthal meint (S. 31), hat diese Auffassung nicht im entferntesten etwas zu tun.

Wir bestreiten zunächst, daß aus Apriorität Subjektivität folgen m u ß. Es liegt gar kein zwingender Grund für diese Folgerung vor. Muß alles, was nicht der empirischen „Außenwelt" angehört, darum im Subjekt seinen Ursprung haben? Apriorisches kann zwar nicht in der Außenwelt begründet sein, dem Wortsinne nach nicht; denn Außenwelt ist Erfahrungswelt und Apriorisches ist von der Erfahrung Unabhängiges. Darum kann es aber doch in einer objektiven (d. h. hier: außer-subjektiven) Sphäre begründet liegen. Und faktisch kann die Wirklichkeit solcher Sphären „idealer Gegenständlichkeit" nicht bestritten werden.

Es folgt also auch nicht notwendig aus der Apriorität von Raum und Zeit die Subjektivität von Raum und Zeit. Wir könnten mit Kant Mathematik auf Raum und Zeit begründen, aber gegen ihn die Subjektivität von Raum, Zeit und Mathematik leugnen, wenn wir nicht auch Einwände gegen die Apriorität von Raum und Zeit vorzubringen hätten. Kant begründet nämlich die Mathematik auf den naturwissenschaftlichen Raum und die naturwissenschaftliche Zeit; denn er kommt ja ausgehend von der Betrachtung naturwissenschaftlicher Gegenstände zu der Überzeugung, daß Raum und Zeit apriorisch seien. Der naturwissenschaftliche Raum und die naturwissenschaftliche Zeit sind aber sicher nicht apriorisch. Oswald Külpe hat die Kantsche Raum- und Zeitlehre einer eingehenden und tiefschürfenden Kritik unterzogen. Das Ergebnis ist, daß keines der Argumente, die Kant für die Apriorität und Subjektivität von Raum und Zeit ins Feld führt, haltbar ist[145]).

Wir haben früher behauptet, Kants Philosophie der Mathematik sei in Metaphysik eingebettet. Die Berechtigung dieser Behauptung wird an dieser Stelle offenbar. Der naturwissenschaftliche Raum und die naturwissenschaftliche Zeit, so wie sie uns schlicht gegeben sind, sind Phänomene, die den „Charakter des Unmetaphysischen" tragen[146]). Sie zwingen zu der metaphysischen Frage, welches ihr Seinsgrund sei. Diese Frage beantwortet Kant — ohne sie als metaphysische Frage zu formulieren oder auch nur als solche zu erkennen — faktisch, indem er Raum und Zeit als subjektive Anschauungsform a priori charakterisiert. Diese Charakterisierung ist eine metaphysische; denn sie sagt, insofern sie viel mehr enthält als bloße schlichte Beschreibung der Phänomene Raum und Zeit, etwas aus über die metaphysische Konstitution des physikalischen Raums und der physikalischen Zeit. Bei Kant bildet also die „Substanz", das „Material" der mathematischen Gegenständlichkeit zugleich den metaphysischen Grund für Physikalisches. In Wahrheit ist aber doch Mathematisches, wie sich aus dem phänomenologischen Befund ergibt, weder selbst metaphysische Substanz, noch bedürfen mathematische Phänomene metaphysischer Fundierung[147]).

Gegen die Lehre von der Subjektivität des Apriorischen haben wir noch folgendes einzuwenden (oben bestritten wir nur erst, daß Subjektivität aus Apriorität n o t w e n d i g gefolgert werden müsse): Entweder ist mit dem Subjekt, in welchem nach Kant der Grund des Apriorischen in den Erkenntnissen liegen soll, ein individuelles oder

145) S. 37 f.
146) Vgl. oben S. 9.
147) Vgl. zum vorstehenden Abschnitt Müller, Einl. i. d. Phil., S. 234.

ein überindividuelles Subjekt gemeint. Trifft das erstere zu, so sagen wir mit Külpe: „Die Notwendigkeit und Allgemeingültigkeit wissenschaftlicher Erkenntnisse darf durchaus nicht ohne Weiteres auf die subjektive Natur der in diesen Erkenntnissen enthaltenen Faktoren oder Gegenstände gegründet werden. Denn was bürgt uns dafür, daß diese Subjektivität nicht eine individuell beschränkte ist, also die Unterschiede aufweist, welche in der Psychologie als persönliche Differenzen bezeichnet werden? ... Eine Notwendigkeit für mich braucht nicht eine Notwendigkeit für jedermann zu sein“ [148]). Die zur Wissenschaftlichkeit vom Standpunkt Kants erforderliche Notwendigkeit und Allgemeinheit ist durch individuelle Subjektivität also keineswegs gesichert, da die mit jenen Bestimmtheiten für Kant in Wechselbeziehung stehende allgemeine Gültigkeit, welche Gültigkeit für jedermann zu jeder Zeit bedeutet, nach dem Vorigen durchaus in Frage gestellt ist. Ist aber von Kant an ein überindividuelles Subjekt gedacht, so kann es sich bei einem solchen nur um etwas Substantielles, Wirkliches, handeln, oder um eine Fiktion. Das letztere würde bedeuten, daß die in den individuellen Subjekten vorhandenen Anlagen auf Grund der apriorischen Anschauungsformen (und Verstandeskategorien) an der Gegenstandsbildung mitzuwirken, zu einem fingierten überindividuellen Subjekt zusammengefaßt wären. Es wäre dann also die Gleichheit der Anlagen der individuellen Subjekte vorausgesetzt, gegen welche Voraussetzung jedoch derselbe Grund spricht, der oben schon bei der Behandlung des ersten Punktes unserer Fallunterscheidung angeführt wurde. Zur Annahme eines substantiellen überindividuellen Subjekts, dessen Existenz allerdings die Notwendigkeit des subjektiven Apriorischen begreiflich machen würde, hätte Kant am allerwenigsten die Berechtigung, weil eine solche Existenzbehauptung Metaphysik (in seinem Sinne!) wäre. Es hieße aber auch wohl Kant falsch verstehen, wollte man die letzte Annahme für seine wahre Meinung halten [149]).

---

148) S. 43.

149) Ebenso lehnt Kant, wie Geyser bemerkt (Grundl. d. Logik, S. 225) die psychologische Begründungsmöglichkeit ab. Die eigentlich Kantische Idee ist die eines transzendentalen Subjekts, eines „Bewußtseins überhaupt“, das nichts anderes ist als eine Konstruktion, nichts Wirkliches (also eine Fiktion). Die logisch-erkenntnistheoretische Betrachtung ist im Unterschied zur psychologischen oder metaphysischen die typische Betrachtung des Kritizismus. — Der transzendentale Idealismus wird bekämpft (und ist, wie uns scheint, in seiner Grundtendenz widerlegt worden) von der realistischen Philosophie aller Richtungen. Immer wieder betont z. B. Geyser, der als einer der Hauptvertreter der Neuscholastik gilt und in seinen grundlegenden philosophischen Werken sich vorwiegend mit dem transzendentalen Idealismus und besonders mit Kant auseinandergesetzt hat, daß das „transzendentale Subjekt eine Konstruktion sei, geschaffen, um die Einheit der Erkenntnisfunktion in der Vielheit der erkennenden empirischen Einzelsubjekte zu erklären. Gegeben ist uns aber nur das Faktum der Erkenntnis durch Einzelsubjekte, und die Einheit der Erkenntnisfunktion erklärt sich viel unmittelbarer aus der Gleichheit der idealen Bestimmung, die alle erkennenden Subjekte durch die eine und einheitliche Welt der seienden Gegenstände und ihrer Sachverhalte erleiden“ (Huber, S. 1152). Vgl. Geyser, Grundlegung der Logik, S. 362, Hessen, S. 50; ferner über die Möglichkeiten der Deutung des transzendentalen Idealismus A. Brunswig, S. 31 f.

Am stärksten fordert unseren Widerspruch die Auffassung Kants, daß mathematische Gebilde Erzeugnisse unseres Verstandes seien. Diese Auffassung wird in weitem Umfang von Philosophen geteilt. Beim Neukantianismus besonders der Marburger Richtung ist sie nicht verwunderlich. Ist doch für dessen Vertreter jeder Gegenstand, sogar der naturwissenschaftliche, subjekterzeugt. Aber auch Realisten sehen vielfach die Mathematik als Inbegriff geschaffener, vom menschlichen Geist erzeugter Objekte an. Für Külpe z. B. „bilden, setzen und bestimmen" die „Formalwissenschaften" (Mathematik und mathematische Physik) ihre Gegenstände selbst [150]). Das „übliche Verfahren" in ihnen ist, „a priori Gegenstände zu konstruieren" [150]). Auch etwa Hessen [151]) hält die Gegenstände der Mathematik, da sie nicht real sind, für „gedachte, ideale Objekte". Nach ihm bleibt in der Mathematik „das Denken in seiner eigenen Sphäre" [152]). Hier wird nicht erkannt, daß „ideal" und „gedacht" nicht notwendig dasselbe bedeutet. „Ideal" besagt zunächst nichts anderes als „nicht real". In Sphären idealer Gegenständlichkeit herrscht keine kausale Verknüpfung der Gegenstände, was für alles Nichtreale charakteristisch ist. Deshalb brauchen aber ideale Gebilde nicht zur Sphäre des Denkens, auch nicht zur Sphäre der Gedanken, zu gehören. Ihre Wirklichkeit braucht sich nicht im Gedachtwerden zu erschöpfen, sie kann durchaus unabhängig vom Denken sein. — Vor allem halten viele Mathematiker die mathematischen Gegenstände mit Dedekind für „freie Schöpfungen des menschlichen Geistes". So wird der entscheidende Fehler Kants von vielen, auch von Gegnern Kants, ins Extrem gesteigert und die mathematische Gegenständlichkeit nicht nur als Schöpfung, sondern sogar als Willkürschöpfung des menschlichen Geistes angesehen [153]). Nach dem im vorigen Abschnitt Dargelegten müssen wir leugnen, daß im Subjekt Notwendigkeit und Allgemeingültigkeit verankert sein könnte. Die Mathematik kann daher in keiner Hinsicht auf Subjektives, sondern muß notwendig auf eine objektive, völlig subjekt-unabhängige Sphäre des Apriorischen begründet werden. Die Gegenstände der Mathematik stehen dem Subjekt gegenüber und werden von ihm erfaßt, wie die realen Gegenstände, ohne aber deshalb Gegenstände der Außenwelt oder aus diesen durch Abstraktion gewonnen zu sein.

Von hier aus ist nun die Zahl-Zeit-Lehre Kants nicht mehr schwer zu beurteilen. Wir glauben mit Recht hervorgehoben zu haben, daß Kants Zahl-Lehre, obwohl in ihr der Zeitbegriff eine wesentliche Rolle spielt, nicht psychologistisch interpretiert werden darf. Ebensowenig wie die der Kantschen ähnliche Zahllehre Natorps, der eine solche Interpretation von vornherein ausdrücklich ablehnt. Nun k a n n aber eine Verbindung von Zahl- und Zeitbegriff, eine Be-

150) 2. Aufl., S. 79 und 89.

151) Wir könnten hier auch Geyser nennen. Vgl. Abriß der allg. Psychol., S. 106 f.

152) S. 110.

153) Man fragt sich: Wie erklären die Verfechter solcher Auffassungen die Notwendigkeit in den „Formalwissenschaften"? Darauf würden jene wohl antworten: Die Schöpfung der Gegenstände ist willkürlich, aber die Beziehungen zwischen den willkürlich geschaffenen Gegenständen sind notwendig.

gründung der Zahl auf das Zählen, nach unserer Auffassung nicht anders als psychologistisch verstanden werden. Jede Tätigkeit eines Subjekts verläuft in der „Psyche", heiße diese Tätigkeit nun „Setzen" oder „Hinzufügen von Einheiten" oder wie auch immer sonst. Deshalb ist der früher zitierte Einwand von Müller [154]) gegen die Theorie, die die Zahl aus „Setzung" entstehen läßt, vollkommen berechtigt. Er trifft Natorp wie Kant. Zahl entsteht nicht durch Zählen, weil Zählen notwendig die Zahlen voraussetzt; denn Zählen heißt: irgendwelchen (nicht notwendig sinnlichen) Gegenständen Zahlen zuordnen. Wir müssen feststellen: Entweder Kant begründet die Zahl auf die Zeit; dann i s t seine Lehre von der Zahl, von unserem Standpunkt aus gesehen, eine psychologistische, auch wenn er sie nicht so verstanden wissen will. Oder er begründet sie nicht auf die Zeit; dann könnte sie in Anbetracht des Umfangs seines Systems nur eine logizistische sein. Das erstere trifft zu. Weder die eine noch die andere Konsequenz liegt im Sinne Kants. Sein System enthält für ein weder rein logisches noch einzig auf einer Form der sinnlichen Anschauung beruhendes Gebilde keinen Raum. Ein solches Gebilde liegt jenseits des Rahmens seines Systems. Der Begriff des Schemas ist derjenige, der über das System hinausweist, ohne aber bei seiner inneren Problematik und Unklarheit wirklich über es hinausführen zu können.

Wir lehnen jede Verbindung von Zahl und Zeit ab, weil die Zeit der Sphäre des Empirischen, Erfahrbaren angehört, die Zahl dagegen einer gänzlich erfahrungsunabhängigen (aber auch nicht rein logischen) Sphäre. Auch die arithmetischen Operationen (Addieren usw.) sind logisch völlig unabhängig von der Zeit. Sie sind zeitlose Verknüpfungen der zeitlosen Zahlgebilde. Die Ausführung der Verknüpfungen im einzelnen Fall (das Rechnen) geschieht selbstverständlich in der Zeit („denn worüber verflösse wohl nicht Zeit!").

Wenn nun die Zahl einer gänzlich erfahrungsunabhängigen Sphäre angehört, also als solche etwas von der sinnlichen Anschauung und ihren Formen letztlich Gelöstes ist, so ist die sinnliche Anschauung in keiner Weise wesentlich für die ontische Struktur der Zahl, also auch nicht in der Weise, in der sie es für Kant ist: als „Prüfstein" für die Möglichkeit der Zahl. Daher sind die Zahlen jedes Erweiterungsbereichs des Bereichs der natürlichen Zahlen, wenn jener aus diesem unter Anwendung der arithmetischen Operationen und unter Berücksichtigung der logischen Grundsätze gewonnen ist, mathematisch „wirklich". Und auch die imaginären Zahlen haben deshalb ein Daseinsrecht in der Mathematik und sind spezifisch mathematische Gebilde. Denn der Widerspruch, den Kant im Begriff der imaginären Zahl $x \quad \sqrt{-a}$ sehen will, besteht nicht. Es scheint auch (nach der Art, wie er den Widerspruch nachzuweisen sucht), daß er ihn nur deshalb zu sehen glaubt, weil er bei der Betrachtung des Begriffs sinnliche Verhältnisse vor Augen hat.

Zur Frage der Methode der Mathematik (wir brauchen hier die Arithmetik nicht besonders zu behandeln) ist folgendes zu sagen: Mathematik konstruiert. Aber sie konstruiert nicht, wie Kant meint,

154) Vgl. oben S. 58.

ihre Fundamente (geometrische Gebilde, natürliche Zahlen); sie konstruiert überhaupt keine Gegenstände, sondern sie findet Gegenstände und Beziehungen zwischen ihnen durch Konstruktionen. Die Gegenstände der Mathematik werden ebenso vom Subjekt vorgefunden, wie die Gegenstände anderer Wissenschaften vom Subjekt vorgefunden werden. Die einfachsten mathematischen Gegenstände, etwa die ersten Elemente aus der Reihe der natürlichen Zahlen, werden intuitiv erfaßt[155]).

V.

In der heutigen Philosophie der Arithmetik, die, worauf wir eingangs schon hinwiesen, in den letzten Jahrzehnten eine wesentliche Durchbildung, Bereicherung und Vertiefung erfahren hat durch Wissenschaftstheorie und mathematischen Fortschritt, lassen sich drei Hauptrichtungen unterscheiden, die man als Empirismus (Psychologismus, Positivismus), Rationalismus (Logizismus) und Intuitionismus bezeichnen kann. Wir werden sehen, mit welcher der drei Hauptrichtungen die Kantsche Philosophie der Arithmetik die engste Verwandtschaft aufweist.

In den empiristischen Theorien ist die Zahl empirischen Ursprungs; sie entsteht durch Zählen erfahrbarer Gegenstände, bezw. wird aus Mengen empirischer Objekte durch Abstraktion gewonnen; die Mathematik ist Erfahrungswissenschaft. In den rationalistischen Theorien ist die Zahl ein rein logisches Gebilde; die Mathematik oder eines ihrer Teilgebiete (Arithmetik, Algebra) ist mit der Logik identisch. Der Intuitionismus sieht in den Zahlen spezifisch mathematische letzte Gegebenheiten, die vom rein logischen Gegenstand wesentlich verschieden sind und auch nicht in der Erfahrungswelt ihren Grund haben.

Die empiristischen Theorien der Zahl sind innerhalb des jetzt von uns betrachteten Zeitraums die ältesten. Als ihre Vertreter sind vor allem J. St. Mill, Helmholtz und Kronecker bekannt[156]). Heute darf diese Richtung wohl als theoretisch überwunden gelten. Den ersten entscheidenden Vorstoß gegen sie unternahmen Russell und besonders Frege vom Standpunkt ihrer logizistischen Theorien der Zahl. Die Widerlegung des Empirismus ist ihnen völlig gelungen,

155) Vgl. unten S. 86 f.

156) J. St. Mill, System der deduktiven und induktiven Logik, 4. Aufl., 1877; Helmholtz, Zählen und Messen, Philos. Aufsätze, Ed. Zeller gewidmet, 1887; Kronecker, Über den Zahlbegriff, Journ. f. Math., 101. — Mill. a.a.O., S 294: „Drei Steine in zwei getrennten Teilen u. drei Steine in einem einzigen Haufen vereinigt, machen auf unsere Sinne nicht denselben Eindruck, und die Behauptung, daß dieselben Steine vermöge einer bloßen Änderung ihrer Anordnung und ihres Ortes bald den einen, bald den anderen Eindruck erzeugen können, ist nicht ein identischer Satz. Es ist eine Wahrheit, die durch lange und konstante Erfahrung erworben wurde, eine induktive Wahrheit, und auf solchen Wahrheiten beruht die Wissenschaft von den Zahlen. Die grundlegenden Wahrheiten dieser Wissenschaft beruhen alle auf dem Zeugnis der Sinne" (Zit. bei Hahn, S. 30). Über J. St. Mills und Wilh. Wundts Lehre von der Arithmetik vgl. Reichardt, S. 630—639 (IX u. X).

dagegen nicht ihr positiver Versuch, die Zahl auf logische Gegenstände, nämlich Mengen, zu begründen[157]). Das spezifisch Mathematische haben sie nicht gesehen. Russell, Frege, Dedekind und andere „Logistiker" sind angegriffen und zum Teil widerlegt worden von den Vertretern des Marburger Neukantianismus (Cohen, Natorp, Cassirer) und anderen (etwa Cohn, Lipps), welche aber ebenfalls rationalistische Theorien der Zahl lehren, indem sie diese als Erzeugnis des reinen Denkens (Natorp: „Setzen von Beziehung") ansehen[158]).

Als Vertreter des Intuitionismus unter den Philosophen nennen wir Heinrich Rickert und Aloys Müller. Von ihnen wird eine spezifisch mathematische Sphäre angenommen. Nach Müller trägt „der Gegenstand der Mathematik ... weder empiristischen noch rationalistischen Charakter"; er ist „vielmehr dem Mathematiker wie dem Logiker einfach gegeben ... Dieses „Gegeben" ... soll ein zunächst schlichtes subjektiv-unabhängiges Vorhandensein ausdrücken, das über ein intuitives Erfassen, ein geistiges Schauen hinweg dem Mathematiker wie dem Logiker ein Arbeiten mit diesem Gegenstand der Mathematik überhaupt erst ermöglicht"[159]).

Nach allem früher — in der Darstellung und Kritik der Philosophie der Arithmetik Kants — Gesagten glauben wir feststellen zu können: Es sind bei Kant Gemeinsamkeiten mit Empirismus und Rationalismus vorfindbar, aber im letzten Grunde besteht bei ihm eine Tendenz zur dritten Richtung, zum Intuitionismus; diese Tendenz konnte nur infolge der Enge seines Gegenstandssystems nicht zur letzten Klarheit des Gedankens gelangen. Weil Kant gleichsam „auf dem Wege" zum Intuitionismus sich befindet, können die Vertreter dieser Richtung, wie uns scheint, Kant mit der größten Berechtigung für sich in Anspruch nehmen, mit größerer Berechtigung jedenfalls auch als die Marburger. Die Tendenz zum Intuitionismus bei Kant zeigt sich einmal negativ in der Ablehnung des reinen Logizismus und des reinen Empirismus. Sie zeigt sich aber auch positiv in dem Versuch, die arithmetischen Phänomene auf ein weder rationales noch empirisches Etwas zu fundieren. Dieses Etwas ist die Zeit, die, wie wir nachdrücklich hervorheben mußten, bei ihm „mehr" ist als bloße Form sinnlicher Anschauung. Den oben genannten Vertretern des Intuitionismus würde nichts ferner liegen, als die Zahl auf die Zeit zu begründen[160]). Aber trotzdem ist gerade die Kantsche Begründung der Zahl auf die Zeit ein Vorahnen intuitionistischer Lösung des philosophen Zahlproblems, insofern durch

157) Hauptwerke: Frege, Die Grundlagen der Arithmetik, 1884; B. Russell, The principles of mathematics, 1903; Russell-Whitehead, Principia mathematica, 1910.

158) Hauptwerke: Die früher schon angeführten von Cassirer, Natorp, Cohen und Cohn und: Lipps, Mythenbildung und Erkenntnis, 1907.

159) Kluge, S. 14 f.

160) Das läßt sich nicht sagen von Oskar Becker, dessen Auffassung von der Mathematik im übrigen ebenfalls intuitionistisch genannt werden muß. Für ihn ist der Zeitbegriff von fundamentalster Bedeutung für die Mathematik. Auch nach Becker „fällt die Kantische Grundauffassung ziemlich genau mit der modernen intuitionistischen zusammen" (S. 738). Jedoch handelt es sich bei der Beziehung, die Becker hier sieht, mehr um das, was wir weiter unten als Finitismus bezeichnen werden.

diese Begründung ein alogisches Moment im Gegenstand „Zahl" behauptet wird, das doch keineswegs ein empirisches ist[161]).

Rickert hat in seinem Werk „Das Eine, die Einheit und die Eins" positiv aufgewiesen, daß es eine alogische spezifisch mathematische Sphäre gibt. Er geht so vor, daß er aus der Gegebenheit der Zahlgleichung — und dies ist auch der einzig richtige Ausgangspunkt; denn man muß die Wissenschaft hinnehmen, wie sie ist, will man ihren Gegenstandstypus erkennen — das „Wesen" der Zahl herzuleiten sucht. Er findet dabei, daß der Zahl ganz andere Kategorien eigen sind als dem spezifisch logischen Gegenstand. Er zeigt, daß das logische „Eine" (dessen Korrelat das „Andere" ist) etwas von der mathematischen „Eins" und daß das logische „und" etwas vom mathematischen „plus" fundamental Verschiedenes ist. Mit dem Aufweis einer spezifischen mathematischen Sphäre fällt jede Notwendigkeit, als Prüfstein mathematischer Existenz die „Anschauung", die „Sinnlichkeit" anzusehen, fort. Es ist nicht mehr wie bei Kant das „Material", aus dem der mathematische Gegenstand gebildet war, zugleich Form der Sinnlichkeit. Das besagt jedoch keineswegs, daß die Frage der Anwendbarkeit der mathematischen und speziell der arithmetischen Gegenstände auf die sinnliche Wirklichkeit nun kein Problem mehr wäre. Vielleicht wird sie jetzt erst recht zum Problem. Für die Existenzberechtigung der Erweiterungen des Bereichs der natürlichen Zahlen gelangt nun gegenüber Kant ein wesentliches einschränkendes Moment in Wegfall, und als einziges begründetes einschränkendes Moment bleibt nur noch das logische, nämlich das Prinzip der Widerspruchsfreiheit. Mit Müller können wir also sagen: „Da die Zahl ... eine eigene, selbständige Wirklichkeit für sich besitzt, so existiert alles, was in diesem Wirklichkeitsbereich durch widerspruchsloses Bilden gefunden ist, als seine rechtmäßigen, bodenständigen Gegenstände"[162]).

Ein immer noch diskutiertes und zum mindesten in der begrifflichen Formulierung von Kant herrührendes Problem enthält die Frage nach dem analytischen oder synthetischen Charakter der arithmetischen und allgemein der mathematischen Urteile[163]). Das Problem ist vom Gegenstandsproblem nicht zu trennen; denn es liegt offensichtlich der folgende Sachverhalt vor: Dann und nur dann, wenn Mathematik formale Logik wäre, wären alle mathematischen Urteile analytisch. Sie sind also synthetisch, wenn, wie es tatsächlich der Fall ist, irgendein alogischer Faktor, welcher Art auch immer, im mathematischen Gegenstand enthalten ist. Faktisch ist es auch so, daß die Vertreter der Logistik die mathematischen Urteile für

---

161) Vgl. zum Vorigen Herrigel: „Daß Kant die Mathematik nicht empiristisch oder „aus der Anschauung" begründet, wenn er in der Struktur des mathematischen Gegenstandes . . . einen alogischen, inhaltlichen Bestandteil fordert, dies müßte eigentlich jedem, der das Kantsche Form-Inhaltproblem verstanden hat, einleuchtend sein. Wir gehen sogar soweit, daß wir sagen: selbst wenn Kant die moderne Mathematik gekannt hätte, hätte er das Mathematische nach wie vor — irrational, d. h. durch Einführung eines alogischen Faktors begründet" (S. 80).

162) Gegenstand der Mathematik, S. 49.

163) Noch jüngst erschien in der „Erkenntnis", Bd. IV (1934) ein Aufsatz von H. Behmann: „Sind die mathematischen Urteile analytisch oder synthetisch?"

analytisch halten [164]), während andererseits Empiristen wie Intuitionisten den synthetischen Charakter der mathematischen Urteile betonen. Bei den Empiristen ist das schon deshalb selbstverständlich, weil ja für sie auch die „Synthesis" nur den empiristisch-psychologistischen Sinn haben kann. Es ist aber klar, daß etwa beim Addieren, beim Hinzufügen als seelischem Prozeß, die individuelle Erkenntnis erweitert wird.

Die Neukantianer der Marburger Richtung versuchen, die logische mit der synthetischen Natur der arithmetischen Urteile in Einklang zu bringen [165]), und sie glauben das sogar (wenigstens Natorp und Cassirer) im Sinne Kants zu tun. Nun denken sie dabei auch nicht an die reine, formale, sondern an die im Kantschen Sinne „transzendentale" Logik. Aber die transzendentale Logik gestattet — dem Wortsinn gemäß — keine gegenstandsgelöste Begrifflichkeit, kennt also keine Gebilde von Erkenntniswert ohne alogischen Einschlag [166]). Es gibt bei Kant — das darf man nicht vergessen — ein „Apriori des Aposteriori".

Beschäftigen wir uns noch kurz mit dem sogenannten Grundlagenstreit in der heutigen Mathematik, soweit Grundlagenfragen der Arithmetik in ihm eine Rolle spielen. Man kann zwei Hauptrichtungen unterscheiden, die man gewöhnlich als Formalismus und Intuitionismus bezeichnet. Dieser Intuitionismus hat nicht direkt etwas mit dem vorhin behandelten Intuitionismus zu tun; es bestehen aber Gemeinsamkeiten zwischen beiden. R. Baldus hat in einer kleinen allgemeinverständlichen Schrift über „Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik" — die uns hier für unsere allgemeinen Gesichtspunkte genügen kann — diese beiden Richtungen folgendermaßen charakterisiert: Der Formalist „ist Axiomatiker ... Die Widerspruchslosigkeit der Merkmale eines Begriffes ist in seinen Augen für die mathematische Existenz des Begriffes notwendig und hinreichend; daher ist die mathematische Existenz der ganzen Zahlen für ihn erst nachgewiesen, wenn der Widerspruchslosigkeitsbeweis der Arithmetik erbracht ist" [167]). „Für den Intuitionisten stehen unter Ausschluß jedes Zweifels und Widerspruchs die einfachsten Gesetze der ganzen Zahlen fest, die nicht mehr beweisbar sind, durch Intuition erfaßt werden.... Während der Formalist die ganze Mathematik in formal-logische Beziehungen zergliedert, hat es nach Ansicht des Intuitionisten keinen Sinn, diese Gesetze der ganzen Zahlen formalistisch auflösen zu wollen. Die ganzen Zahlen haben für ihn eine mathematische Existenz, die nicht erst nachgewiesen zu werden braucht. Das ... Problem der Formalisten, die Widerspruchslosigkeit der Arithmetik ganzer Zahlen und damit die

164) Ein Beleg dafür ist der in der vorigen Anmerkung zitierte Aufsatz von Behmann. — Vgl. auch Couturats Auseinandersetzung mit „Kants Philosophie der Mathematik"; dazu Herrigel, S. 8—12, und Cassirer, Kant und die moderne Mathematik.

165) Weil diese Verbindung versucht worden ist, genügt nicht der Hinweis auf die Tatsache, daß bei Kant die mathematischen Urteile apriorischen und synthetischen Charakter besitzen, um Kants Stellung „jenseits von Empirismus und Rationalismus" darzutun.

166) Vgl. Herrigel, S. 10.

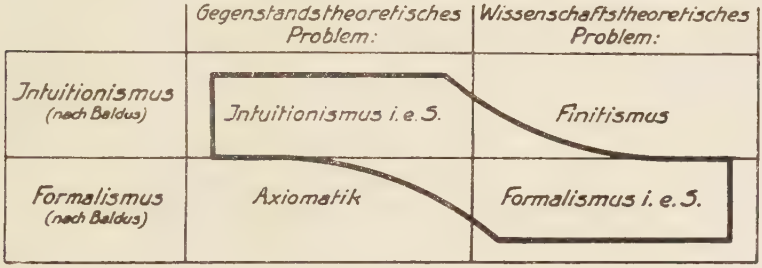
167) S. 18; Baldus weist noch darauf hin, daß die meisten Mathematiker Formalisten sind.

Existenz der ganzen Zahlen zu beweisen, gibt es für den Intuitionisten nicht... Und darüber hinaus existiert mathematisch für den Intuitionisten nicht, wie für den Formalisten, alles das, was widerspruchslos ist, sondern nur das, was mit endlich vielen Worten ausdrückbar, mit endlich vielen Schlüssen beweisbar" ist[168]). Es ist sofort klar, daß in beiden Richtungen, so wie sie hier charakterisiert sind, zwei gänzlich verschiedene Fragen beantwortet werden: nämlich erstens die Frage nach den Fundamenten der Arithmetik, nach den ganzen Zahlen, und zweitens die Frage nach dem Kriterium für die Berechtigung weiterer arithmetischer Gegenstände. Wir wollen in diesem Zusammenhang, etwas abweichend von unserer früheren Terminologie, die erste Frage die gegenstandstheoretische und die zweite die wissenschaftstheoretische nennen. Wir beziehen nun den Begriff „Intuitionismus" nur auf die gegenstandstheoretische Frage und den Begriff „Formalismus" nur auf die wissenschaftstheoretische Frage. Abgesehen von dieser Inhaltsbeschränkung sollen diese beiden Begriffe die Bedeutung behalten, die sie in der Charakterisierung von Baldus haben. Das Gegenteil des „Intuitionismus" in dem soeben festgelegten engeren Sinne (i. e. S.) nennen wir „Axiomatik", für welche demnach die Forderung charakteristisch ist, daß die mathematische „Existenz" der positiven ganzen Zahlen erst logisch bewiesen werde, und zwar „axiomatisch", d. h. durch Aufstellung eines Axiomensystems, aus welchem die Gesetze der natürlichen Zahlen abgeleitet werden können[169]). Das Gegenteil des „Formalismus" (i. e. S.) nennen wir "Finitismus", dessen Wesenseigentümlichkeit also darin besteht, daß er sich nicht mit dem Prinzip der Widerspruchslosigkeit für die Ableitung neuer Gegenstände begnügt, sondern daß er die Endlichkeit der Anzahl der Beweisschritte fordert. Axiomatik ist also, wie Intuitionismus i. e. S., auf die gegenstandstheoretische Frage, Finitismus, wie Formalismus i. e. S., auf die wissenschaftstheoretische Frage bezogen. In dem, was Baldus entsprechend den heute tatsächlich vorhandenen Richtungen „Intuitionismus" nennt, ist demgemäß Intuitionismus i. e. S. mit Finitismus, und in dem, was er „Formalismus" nennt, Axiomatik mit Formalismus i. e. S. vereinigt. Diese beiden Arten der Vereinigung sind aber

168) S. 24 f. — Wir bringen noch anmerkungsweise die Charakterisierung der beiden Richtungen von A. Heyting: „Nach formalistischer Auffassung ist die eigentliche Mathematik rein formaler Art; es wird aber großes Gewicht gelegt auf die metamathematische Betrachtung der formalen Mathematik, durch die insbesondere die Widerspruchsfreiheit (in einem speziellen, genau festzulegenden Sinn) des formalen Systems sichergestellt werden soll. Nach intuitionistischer Auffassung hat die Mathematik inhaltliche Bedeutung und entsteht sie durch eine konstruktive Tätigkeit unseres Verstandes. Der wirkliche Aufbau der Mathematik auf dieser Grundlage ist ein gewaltiges Problem; es zeigt sich, daß nicht dem ganzen Bestand der klassischen Mathematik ein solcher inhaltlicher Sinn zugeschrieben werden kann" (S. 2). — Auf weltanschauliche Hintergründe des Intuitionismus weist Dubislaw (S. 43) hin. Demnach erwächst der „Finitismus" (s. unten) einer pragmatistischen und aktivistischen Weltanschauung. Vgl. hierzu auch Heyting, S. 65. (Es scheint, als ob dem Intuitionismus i. e. S. (s. unten) ein gewisser Mystizismus zugrunde läge, worauf Müller gelegentlich hinweist. Es handelt sich dabei natürlich nur um einen psychologischen Zusammenhang).

169) Es handelt sich bei diesem Begriff „Axiomatik" um die „formale Axiomatik" Hilberts (Hilbert-Bernays, S. 2).

keineswegs die einzig möglichen. Es schließen sich nur aus: Intuitionismus i. e. S. und Axiomatik einerseits, Finitismus und Formalismus i. e. S. andererseits. Dagegen schließen sich nicht aus: Formalismus i. e. S. und Intuitionismus i. e. S. Vielmehr ist gerade die Verbindung von Formalismus i. e. S. und Intuitionismus i. e. S. nach früher Dargelegtem die einzige, die dem Wesen der Arithmetik gerecht wird. Die folgende Figur veranschaulicht das soeben Ausgeführte.



Mit den Intuitionisten ist zu betonen, daß die Reihe der natürlichen Zahlen eine letzte, spezifisch mathematische, intuitiv (durch unsinnliche Schau) [170]) erfaßbare „Gegebenheit" mit besonderen Kategorien ist. In dieser Auffassung treffen sich die Mathematiker Brouwer und Weyl, um nur die bekanntesten Intuitionisten zu nennen, mit den Philosophen Rickert und Müller, die die ontologische Untersuchung der natürlichen Zahlen geleistet haben, auf welche jene — als Mathematiker — verzichten. Den Formalisten ist zuzugeben, daß (außer der spezifisch mathematischen Grundlage der Arithmetik, welche die Reihe der natürlichen Zahlen ist) die logischen Grundsätze, insbesondere das Prinzip der Widerspruchsfreiheit, allein notwendig zum Auffinden mathematisch existierender abgeleiteter Zahlen sind [171]).

Kant verbindet ebenfalls „gegenstandstheoretischen" Intuitionismus" mit „wissenschaftstheoretischem" Formalismus. Aber beides in dieser Verbindung ist bei ihm nur in Annäherung vorhanden: Intuitionismus nur in Annäherung, insofern als er noch nicht das We-

170) Vgl. Müller, Psychologie, S. 140 f.

171) Burkamp, S. 154: „Eine eigentümliche Verschränkung von Formalismus und Intuitionismus unter dem herrschenden Gesichtspunkt der Forderung eines Nachweises der Widerspruchsfreiheit bei Hilbert und seiner Schule, die meist als die „formalistische" bezeichnet wird." Sicher ist Hilbert Formalist in oben dargelegtem Sinne, jedoch dünkt uns unwahrscheinlich, daß man ihn in irgendeinem Sinne einen Intuitionisten nennen kann. Über Hilbert urteilt dessen Mitarbeiter Bernays: „Durch die Betrachtungsweise, in welcher die Absonderung des Spezifisch-Mathematischen vor allem Inhaltlichen seinen Gipfelpunkt erreicht, gewinnt die Hilbertsche Ansicht von dem Wesen der Mathematik und der axiomatischen Methode erst ihren wirklichen Abschluß. Denn wir erkennen nunmehr, daß jene Sphäre des Mathematisch-Abstrakten, in welche die Denkmethode der Mathematik alles theoretisch Faßbare übersetzt, nicht diejenige des inhaltlich Logischen, sondern vielmehr das Gebiet des reinen Formalismus ist" (Zit. bei Ternus, S. 227 f.).

sen der spezifisch mathematischen Fundamente, der Zahlen, richtig erkannt hat, Formalismus nur in Annäherung, insofern er von den abgeleiteten Zahlen noch die sinnliche Anwendbarkeit verlangt[172]). Jedenfalls sind bei ihm sowohl für „Finitismus" als auch für „Axiomatik" keine Anhaltspunkte zu finden[173]). Nach unseren Ausführungen über den Grundlagenstreit stellt sich die Aufgabe einer vollständigen Philosophie der Arithmetik etwa folgendermaßen dar:

1. Die Kategorien der natürlichen Zahlen sind zu bestimmen. (Das ist in weitem Umfang durch Philosophen der Gegenwart geschehen).

2. Die Gegenstände der abstrakten Algebra: Halbgruppe, Gruppe, Integritätsbereich, Körper, Quotientenkörper, Polynombereich, Wurzelkörper usw., müssen auf ihre ontische Struktur hin untersucht werden. Für unser Problem haben diese Gegenstände nämlich eine besondere Bedeutung, die wir kurz erläutern wollen: Aus der Existenz einer aus beliebigen Elementen bestehenden Halbgruppe kann auf die Existenz einer diese Halbgruppe umfassenden Gruppe geschlossen werden. Aus der Existenz eines aus beliebigen Elementen bestehenden Integritätsbereichs kann

---

172) Das Formalistische in Kants Philosophie der Mathematik hebt u. a. Windelband hervor: „Wenn zunächst Kant die Mathematik als eine anschauliche Wissenschaft bezeichnet, so ist das nicht so zu verstehen, als ob damit aus ihr die Verstandestätigkeit überhaupt eliminiert werden sollte. Begriffsbildung, Urteil und Schluß gehören selbstverständlich zu ihrem Apparate wie zu demjenigen aller anderen Wissenschaften. Was Kant der früheren Auffassung gegenüber behauptet, ist vielmehr nur dies, daß der Grund für die Begriffe und die Axiome, mit denen die Mathematik operiert, nicht in rein logischen Prozessen, sondern vielmehr in Akten der Anschauung zu suchen sei" (S. 58 f). Anm. S. 58: „Daß auch die Beweisführung der Mathematik nicht in der Form des Syllogismus stattfinde, sondern auf anschaulichen Überführungen beruhe, hat Kant niemals behauptet. Diese Konsequenz hat erst Schopenhauer zu ziehen gesucht, während für Kant sich die Anschaulichkeit des mathematischen Verfahrens auf die Konstruktion der Begriffe und die der Beweisführung zugrunde liegenden Axiome beschränkt." Daß nicht nur die Verstandestätigkeit, die Windelband hier im Auge hat — und die offensichtlich genau das Wesen dessen ausmacht, was wir als Formalismus i. e. S. bezeichneten — von Kant nicht aus der Mathematik eliminiert wird, daß auch an den mathematischen Gegenständen selbst in mehrfacher Hinsicht der schöpferisch tätige Verstand beteiligt ist, wurde oben wiederholt von uns betont.

173) Vgl. die von unseren allgemeinen Gesichtspunkten aus bestehende Verwandtschaft mit neuscholastischen Auffassungen. So schreibt Ternus: „Es gibt eben in der Mathematik doch so etwas Objektiv-gegenständliches, „daß der liebe Gott gemacht hat". Und wenn ein Radikaler aus der vordersten Linie der mathematisch-philosophischen Forschung, H. Weyl (Math. Zeitschr. 10 [1921]) mit aller Energie daran festgehalten wissen will, „daß die Mathematik ganz und gar, sogar den logischen Formen nach, in denen sie sich bewege, abhängig sei von dem Wesen der natürlichen Zahl", so hat ihn sein phänomenologisches Gefühl zur Intuition eines Gegenständlichen angeleitet, wie es die Scholastik als das Gebilde mittlerer Abstraktion bezeichnet" (S. 229). Hilberts Auffassung nennt Ternus „die Übertreibung, die das objektiv gegebene mathematische Grundphänomen künstlich ignoriert. Man arithmetisiere alle Mathematik und formalisiere die Grundgebilde und Grundbeziehungen, soweit man es vermag, es verbleibt ein gegenständlicher Rest, dessen Eigenart gewiß noch der genaueren philosophischen Behandlung bedarf" (S. 228).

auf die Existenz eines diesen Integritätsbereich umfassenden Quotientenkörpers geschlossen werden. Es kann ferner bewiesen werden, daß zu jedem beliebigen Grundkörper ein „algebraisch abgeschlossener" Körper, d. h. ein Körper, in welchem jedes Polynom mit Koeffizienten aus dem Grundkörper vollständig in Linearfaktoren zerfällt, existiert, der den Grundkörper umfaßt. Diese allgemeinen Sätze der abstrakten Theorien können nun angewandt werden auf die konkreten natürlichen Zahlen, da diese eine (additive und multiplikative kommutative) Halbgruppe bilden. Durch diese Anwendung — der Begriff der Adjunktion spielt dabei eine wesentliche Rolle — kommt man schließlich zum Aufweis der Existenz aller „algebraischen Zahlen". Auf Grund der Bewertungstheorie von Kürschàk [174]), die eine Verallgemeinerung der Cantorschen Theorie der Fundamentalfolgen ist, gelangt man ferner vom Körper der rationalen Zahlen durch Bewertung derselben mit ihren absoluten Beträgen zum Körper aller reellen Zahlen, der in der Terminologie der Bewertungstheorie der „derivierte Körper" des Körpers der rationalen Zahlen heißt. Damit sind also auch die nichtalgebraischen, also die transzendenten reellen Zahlen und nach Adjunktion der imaginären Einheit, welche eine algebraische Zahl ist, alle komplexen Zahlen mathematisch erfaßt. Da die genannten mathematischen Theorien in sich fest begründet sind, ist der Beweis der mathematischen Existenz aller komplexen Zahlen dann vollständig geliefert, wenn eben die abstrakten Gegenstände der abstrakten Algebra bezw. der Bewertungstheorie mathematische Existenzberechtigung haben. Eine genauere ontologische Untersuchung dieser Gegenstände würde ergeben, daß sie an sich zunächst nicht spezifisch mathematische, sondern relationstheoretische Gegenstände sind, die aber so strukturiert sind, daß sie Anwendung nur auf „konkrete" mathematische Gegenstände und mathematische Operationen gestatten. Somit muß ihre Anwendung in der Mathematik vom gegenstands- und wissenschaftstheoretischen Standpunkt aus als berechtigt anerkannt werden [175]). Nach Früherem ist sofort einzusehen, daß die abstrakten Gegenstände das „Formalistische" und die letzte Gegebenheit, auf die sie angewandt werden, das „Intuitionistische" der Arithmetik darstellen.

3. Die besonderen Kategorien der durch Anwendung der abstrakten Gruppentheorie, Körpertheorie und Bewertungstheorie auf die Halbgruppe der natürlichen Zahlen gefundenen abgeleiteten Zahlen sind zu bestimmen.

Mit dem Entwurf dieses Programms einer Philosophie der Zahl haben wir uns weit von Kant entfernt. Vom Boden des Kantschen Systems aus ist hier nicht Schritt zu halten. Die Größe des Unterschiedes zwischen Kantscher und gegenwärtiger Philosophie der

---

174) Jos. Kürschàk, Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, Journ. für Mathematik, 142 (1913), S. 211—253.

175) Daraus folgt speziell, daß gleiche Existenzberechtigung und spezifisch mathematische Qualität wie die reellen Zahlen auch die von K. Hensel eingeführten sogenannten p-adischen Zahlen (Hauptwerk: Hensel, Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig und Berlin 1908) besitzen, welche einen Körper bilden, der der derivierte Körper des Körpers der rationalen Zahlen bei p-adischer Bewertung der letzteren ist.

Arithmetik wird durch einen flüchtigen Blick auf den Probleminhalt und -umfang der letzteren offenbar. Wir glauben aber gezeigt zu haben — und gerade auch durch den Vergleich mit gegenwärtigen Anschauungen —, daß Kant vom wahren Sinn und Sein des Mathematischen mehr geahnt und geschaut hat als jene unter den heutigen Mathematikern, die in einem leeren Formalismus das Wesen ihrer Wissenschaft sehen wollen.

LITERATUR

1. Kants gesammelte Schriften, herausgegeben von der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, Bd. II, III, IV, X, XI und XVI = Erste Abteilung: Werke, Bd. 2 (1905), 3 (1904), 4 (1903), Zweite Abteilung: Briefwechsel, Bd. 1 (1900) und 2 (1900), Handschriftlicher Nachlaß, Bd. 3 (1914), Berlin.
2. Kant, Logik, herausgegeben von Jäsche, Königsberg, 1800.
3. Adickes, Erich, Kants Lehre von der doppelten Affektion unseres Ich als Schlüssel zu seiner Erkenntnistheorie, Tübingen 1929.
4. von Aster, Ernst, Naturphilosophie, Berlin 1932.
5. Baldus, Richard, Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik, Wissen und Wirken, 11. Bd., Karlsruhe, 1924.
6. Bauch, Bruno, Immanuel Kant, Berlin und Leipzig, 1917.
7. Becker, Oskar, Mathematische Existenz, Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung, Bd. 8 (1927).
8. Behmann, Heinrich, Sind die mathematischen Urteile analytisch oder synthetisch?, Erkenntnis IV (1934), S. 1—27.
9. Behn, Siegfried, Einleitung in die Metaphysik, Freiburg, 1933.
10. Brunswig, Alfred, Das Grundproblem Kants, Leipzig und Berlin, 1924.
11. Burkamp, Wilhelm, Logik, Berlin 1932.
12. Cassirer, Ernst, Kant und die moderne Mathematik. (Mit Bezug auf Bertrand Russells und Louis Couturats Werke über die Prinzipien der Mathematik), Kantstudien, Bd. 12 (1907), S. 1—49.
13. — Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Berlin, 1910.
14. Cohen, Hermann, Logik der reinen Erkenntnis, 2. Aufl., Berlin, 1914.
15. Cohn, Jonas, Voraussetzungen und Ziele des Erkennens, Leipzig, 1908.
16. Couturat, Louis, Die philosophischen Prinzipien der Mathematik (Anhang: Kants Philosophie der Mathematik), Deutsch von Karl Siegel, Leipzig, 1908.
17. Curtius, Ernst Robert, Das Schematismuskapitel in der Kritik der reinen Vernunft, Kantstudien XIX (1914), S. 338—366.
18. Dubislaw, Walter, Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart, Berlin, 1932.
19. Fischer, Kuno, Immanuel Kant und seine Lehre, 2 Bde., Heidelberg, 1898 und 1899.
20. Gent, Werner, Die Raum-Zeit-Philosophie des XIX. Jahrhunderts, Berlin, 1932.
21. Geyser, Joseph, Logistik und Relationslogik, Philosophisches Jahrbuch der Görresgesellschaft, XXII (1909), S. 123—143.
22. — Lehrbuch der allgemeinen Psychologie, Münster i./W., 1908.
23. — Grundlegung der Logik, Münster i./W., 1919.
24. — Abriß der allgemeinen Psychologie, Münster i./W., 1922.
25. Hahn, Hans, Logik, Mathematik und Naturerkennen, Wien, 1933.
26. Heinemann, Fritz, Der Aufbau von Kants Kritik der reinen Vernunft und das Problem der Zeit, Gießen, 1913.
27. Herrigel, Eugen, Logik der Zahl, Diss., Heidelberg, 1913, gedruckt 1921.
28. Hessen, Johannes, Erkenntnistheorie, Berlin und Bonn, 1926.
29. Heyting, A., Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus, Beweistheorie, Berlin 1934.

30. Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik. Berlin, 1928.
31. Hilbert-Bernays, Grundlagen der Mathematik, 1. Bd., Berlin, 1934.
32. Huber, Kurt, Joseph Geysers Stellung in Logik und Erkenntnistheorie, Philosophia perennis II, Festgabe Joseph Geyser, Regensburg, 1930, S. 1143—1172.
33. Husserl, E. G., Philosophie der Arithmetik, I, Halle, 1891.
34. Kluge, Fritz, Aloys Müllers Philosophie der Mathematik und der Naturwissenschaft, Leipzig, 1935.
35. Külpe, Oswald, Immanuel Kant, 5. Aufl., Leipzig, 1921, 2. Aufl. 1908.
36. Liebert, Arthur, Erkenntnistheorie, 1. Bd., Berlin, 1932.
37. Lipps, G. F., Mythenbildung und Erkenntnis, Leipzig und Berlin, 1907.
38. Marcus, Ernst, Aus den Tiefen des Erkennens, München, 1925.
39. — Die Zeit- und Raumlehre Kants in Anwendung auf Mathematik und Naturwissenschaft, München, 1927.
40. Medicus, Fritz, Bemerkungen zum Problem der Existenz mathematischer Gegenstände, Kantstudien XIX (1914).
41. Menzel, Alfred, Die Stellung der Mathematik in Kants vorkritischer Philosophie. Halle, 1911.
42. Meyer, Dietrich, Über Kants Lehre von der mathematischen Erkenntnis, Diss. Erlangen, 1918, Hannover, 1920.
43. Michaelis, C. Th., Über Kants Zahlenbegriff, Berlin, 1884.
44. Mörchen, Hermann, Die Einbildungskraft bei Kant. Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung, Bd. 11 (1930), S. 311—493.
45. Monzel, Alois, Kants Lehre vom inneren Sinn, Bonn, 1913.
46. — Kants Lehre vom inneren Sinn und der Zeitbegriff im Duisberg'schen Nachlaß, Kantstudien XXV (1920), S. 427—435.
47. Müller, Aloys, Der Gegenstand der Mathematik mit besonderer Beziehung auf die Relativitätstheorie, Braunschweig, 1922.
48. — Über den Gegenstandscharakter der Zahlen, Annalen der Philosophie, 4. Bd., S. 485—512.
49. — Strukturwissenschaft und Kulturwissenschaft. Kantstudien XXVII (1922), S. 59—85.
50. — Psychologie, Berlin und Bonn, 1927.
51. — Einleitung in die Philosophie, 2. Aufl., Berlin und Bonn, 1931.
52. Natorp, Paul, Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften, Leipzig und Berlin, 1910.
53. Paulsen, Friedrich, Immanuel Kant. Sein Leben und seine Lehre, Stuttgart, 4. Aufl., 1904.
54. Reichardt, Willibaldt, Kants Lehre von den synthetischen Urtheilen a priori in ihrer Bedeutung für die Mathematik, Philosophische Studien, Bd. 4, (1888), S. 595—639.
55. Rickert, Heinrich, Das Eine, die Einheit und die Eins, 2. Aufl., Tübingen, 1924.
56. Riehl, Aloys, Der philosophische Kritizismus, Geschichte und System, 2. Bd., 3. Aufl., 1926.
57. Rosenthal, Friedrich, Über die logische und erkenntnistheoretische Bedeutung des mathematischen Gruppenbegriffs, Diss., Jena, 1928.
58. Ternus, Joseph, S. J., Zur Philosophpie der Mathematik, Philosophisches Jahrbuch der Görresgesellschaft, 39. Bd., 3. Heft, S. 217—231.
59. Windelband, Wilhelm, Geschichte der neueren Philosophie, 2. Bd., 1922.
60. Zschocke, Walter, Über Kants Lehre vom Schematismus der reinen Vernunft. Aus dem Nachlaß herausgegeben von H. Rickert, Kantstudien, XII (1907).

LEBENSLAUF.

Am 28. Febr. 1910 wurde ich, Joseph Heinrich Friedrich Holzapfel, als Sohn des Lithographen Friedrich Holzapfel und seiner Ehefrau Katharina, geb. Pohlen, zu Düsseldorf geboren. Ich bin katholischer Konfession. Nach 4jährigem Besuch der Volksschule am Rather Kreuzweg in Düsseldorf-Rath und 9jährigem Besuch der Lessing-Oberrealschule in Düsseldorf bestand ich an der letzteren die Reifeprüfung am 1. März 1929. Von Ostern 1929 bis Ostern 1931 studierte ich in Bonn, von Ostern 1931 bis Ostern 1932 in Berlin, von Ostern 1932 bis Ostern 1933 in Köln und von Ostern 1933 bis Herbst 1934 wieder in Bonn Deutsch, Geschichte und Philosophie, außerdem vom Wintersemester 1931/32 ab Mathematik. Am 22. und 23. November 1935 bestand ich in Bonn die wissenschaftliche Prüfung für das höhere Lehramt in Mathematik, Deutsch und philosophischer Propädeutik. Den Vorbereitungsdienst für das Lehramt an höheren Schulen trat ich am 1. April 1936 am Staatlichen Hohenzollern-Gymnasium in Düsseldorf an. Die mündliche Doktorprüfung in Philosophie, Mathematik und Psychologie fand am 27. Mai 1936 in Bonn statt.

Auf Anregung und unter Anleitung von Herrn Geheimrat Professor Dr. Adolf Dyroff studierte ich vom 3. Semester ab die philosophischen Hauptschriften Kants. In den Problemkreis der Philosophie der Mathematik wurde ich von Herrn Professor Dr. Aloys Müller eingeführt, der mich Anfang 1933 zur eingehenden Beschäftigung mit neueren philosophischen Theorien der Zahl veranlaßte. Das Thema der vorliegenden Dissertation stellt eine Verbindung der beiden genannten Arbeitsgebiete dar.

Herrn Geheimrat Professor Dr. A. Dyroff, der mir während meines ganzen Studiums Rat und Hilfe in jeder Hinsicht zuteil werden ließ, sowie Herrn Professor Dr. A. Müller schulde ich besonders großen Dank, dem ich hiermit von Herzen Ausdruck geben möchte.